

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Университет МГУ-ППИ в Шэньчжэне

Направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Об интегральном уравнении, получающемся в результате замыкания третьей степени

Ван Чжэньпэн

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

к.ф-м.н., доцент

Никитин А.А.

Шэньчжэнь, 2024

Оглавление

摘要	1
Аннотация	2
1 Введение	4
1.1 О моделях динамики населения	4
1.2 Предмет текущей работы	6
2 Объяснение математических символов	7
3 Описание модели биологических сообществ	8
4 Случай области бесконечной меры	13
5 Оператор равновесия	17
6 Вспомогательные условия	24
6.1 Вспомогательные утверждения	24
6.2 Введение вспомогательного пространства	28
7 Неподвижная точка оператора равновесия	34
7.1 Существование неподвижной точки оператора равновесия	34
7.2 Единственность неподвижной точки оператора равновесия	51
8 Результаты численного метода	54
9 Заключение	55
Список литературы	57

摘要

本研究探讨了通过空间矩的三级闭包方法得到的非线性积分方程组，该方程组考虑了生物种群内部的相互作用和空间结构，在数学生物学领域具有重要应用。本研究解决了这些方程组的可解性问题，并对解进行可视化展示。这不仅深入帮助理解生物种群的空间结构动态，还预测了种群在复杂环境中的行为变化。

在研究方法上，采用了数学建模和理论分析的结合方式，专注于分析由三级闭包方法得到的积分方程组的特性。研究过程中，面临了一项主要挑战：在尝试计算平衡算子的 Lipschitz 系数时，由于涉及到的函数自卷积后再乘以自身的可积性难以保证，导致在 Lebesgue 可积函数空间中估计 Lipschitz 系数的可靠性受到影响。为了克服这一难题，创造了一个特殊的 Banach 空间，并为这个空间定义了一个新的范数，使得在这个空间内可以有效地处理函数的自卷积乘积操作。

在这一新范数下，进一步证明了平衡算子的某些部分满足紧性条件，而其他部分满足 Lipschitz 条件。通过应用 Leray-Schauder 定理和 Banach 压缩映射定理，成功地证明了这些算子的不动点的存在性与唯一性。此外，为了更直观地理解方程的解，使用了 Neumann 数值方法来计算方程组的数值解，并进行了图形化展示，这些图像直观地展示了解的性质和行为。

研究成果证实了通过空间矩的三级闭包方法得到的非线性积分方程组确实存在解，并且这些解可以通过数值方法有效地可视化。这一发现不仅为提供了一种新的视角来分析和预测生物种群在空间结构中的动态行为，还展示了数学模型在解决生物学中复杂系统问题时的应用潜力。此外，通过这项研究，展示了理论研究与实际应用结合的重要性，特别是在为生物种群管理和生态系统保护制定策略时，这些理论模型提供了强有力的决策支持工具。总之，这项工作不仅增进了对生物种群内部相互作用和空间结构动力学的理解，还推动了数学生物学领域的理论与实践的深入融合。

关键词：数学生物学，非线性积分方程，矩方程体系，种群的空间结构动力学，数值方法，诺依曼级数法

Аннотация

Это исследование рассматривает группу нелинейных интегральных уравнений, полученных с использованием метода трехуровневого замыкания пространственных моментов, учитывающих взаимодействия внутри биологических популяций и их пространственную структуру, что имеет важное значение в области математической биологии. Исследование решает проблемы разрешимости этих уравнений и проводит визуализацию их решений. Это не только способствует глубокому пониманию динамики пространственной структуры популяций, но и позволяет прогнозировать изменения в поведении популяций в сложных условиях.

В методологии исследования использовалось сочетание математического моделирования и теоретического анализа, сосредоточенное на анализе свойств группы интегральных уравнений, полученных методом трехуровневого замыкания. В процессе исследования возникла основная проблема: при попытке вычислить коэффициенты Липшица для балансового оператора возникли трудности из-за невозможности гарантировать интегрируемость функции самосвертки, умноженной на себя, что повлияло на надежность оценки этих коэффициентов в пространстве интегрируемых по Лебегу функций. Для преодоления этой проблемы было создано специальное пространство Банаха, и для этого пространства была определена новая норма, что позволило эффективно обрабатывать операции самосвертки функций.

В этой новой норме дополнительно доказано, что некоторые части балансового оператора удовлетворяют условиям компактности, в то время как другие части удовлетворяют условиям Липшица. С применением теоремы Лере-Шаудера и теоремы о сжимающем отображении Банаха успешно доказано существование и единственность неподвижной точки этих операторов. Кроме того, для более наглядного понимания решений уравнений использовался численный метод Неймана для расчета численных решений уравнений и их визуализации, что позволило наглядно продемонстрировать свойства и поведение решений.

Результаты исследования подтвердили, что группа нелинейных интегральных уравнений, полученных методом трехуровневого замыкания пространственных моментов, действительно имеет решения, которые могут быть эффективно визуализированы с помощью численных методов. Это открытие не только предоставляет новую перспективу для анализа и прогнозирования динамики

поведения биологических популяций в пространственных структурах, но и демонстрирует потенциал применения математических моделей для решения сложных биологических систем. Кроме того, данное исследование показывает важность сочетания теоретических исследований и практического применения, особенно при разработке стратегий управления биологическими популяциями и защиты экосистем. В целом, это исследование не только способствует глубокому пониманию взаимодействий внутри биологических популяций и динамики пространственной структуры, но и стимулирует глубокое интегрирование теории и практики в области математической биологии.

Ключевые слова: математическая биология; нелинейные интегральные уравнения; иерархии моментных уравнений; пространственно структурированная динамика популяций; численные методы; метод рядов Неймана

Об Приближённое решение одного нелинейного интегрального уравнения, получающегося в результате замыкания третьей степени

1 Введение

1.1 О моделях динамики населения

Долгое время в сфере биологии было предложено множество аналитических моделей, которые охватывают широкий спектр процессов. Эти модели играют ключевую роль в нашем понимании различных явлений, начиная с вытеснения одного вида организмов другим и заканчивая предсказанием распространения эпидемий. Особую важность среди этих моделей имеют математико-биологические модели популяционной динамики. Эти модели позволяют анализировать изменения в численности и структуре популяций с течением времени и выявлять факторы, влияющие на эти изменения. Важно отметить, что модели популяционной динамики не только помогают нам понять основные принципы, определяющие динамику популяций, но и имеют практическое применение в различных областях, включая экологию, медицину и управление ресурсами.

Изначально модели популяционной динамики формулировались с использованием дифференциальных уравнений. Одной из первых попыток аналитического описания динамики развития популяции живых организмов было уравнение Томаса Мальтуса^[1]:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N$$

где под N подразумевается численность вида, а α – некоторая константа. Решение этого уравнения имеет канонический вид $N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}$, где N_0 – это численность в момент времени t_0 . Очевидно, что экспоненциальный закон описывает реальную динамику достаточно неточно. Это в своё время подвигло основателя математической биологии Альфреда

Лотку усложнить модель Мальтуса^[2], введя уравнение:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{M} \right)$$

где r – положительная константа, задающая потенциальную ёмкость экологической системы, а M – максимально возможная численность вида в рассматриваемом ареале. Решение этого уравнения задаётся уже более сложной функцией (логистической кривой)

$$N(t) = \frac{N_0 M}{N_0 + (M - N_0) e^{-rt}},$$

где N_0 – численность вида в момент $t = 0$. Эта функция дала начало целому ряду моделей популяционной динамики, основанных на логистическом законе. Также широко известна модель Лотки-Вольтерры^{[3], [4]}, которая является первой попыткой описания динамики сообщества, состоящего из более, чем одного вида:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \alpha N_1 - \gamma N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\beta N_2 + \delta N_1 N_2 \end{cases}$$

Здесь N_1, N_2 – численности первого и второго видов соответственно, а α, β, γ и δ – положительные константы, определяющие силу взаимодействий.

Рассмотренные выше модели имеют общий недостаток: они не учитывают пространственную неоднородность расположения организмов. Эти модели предполагают, что популяции равномерно распределены на ареале обитания, что иногда называется ”хорошо перемешанными”. Однако, в реальных экологических системах часто наблюдается разная степень пространственной структурированности, где взаимодействия между организмами зависят от их местоположения. Этот подход недостаточно точно описывает реальные процессы, особенно в экосистемах с гетерогенным ландшафтом или наличием препятствий для перемещения организмов. Появление моделей, основанных на вкла-

де каждой особи в динамику в целом (Individual-Based Models), стало следствием развития математической биологии. В таких моделях каждая особь рассматривается индивидуально, учитывая её местоположение, характеристики и взаимодействия с окружающей средой и другими особями. Это позволяет более точно моделировать пространственную структуру популяции и её динамику, что делает такие модели более пригодными для анализа реальных экологических систем.

1.2 Предмет текущей работы

Рассматривается модель самоструктурирующихся биологических сообществ, предложенная Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу, описанная в работе [5], [6], и являющаяся обобщением модели, описанной в работе [7]. Преимущество этой модели заключается в использовании информации о пространственной структуре сообщества. В отличие от классических моделей, описывающих динамику популяций, эта модель учитывает поведение каждого индивида и его влияние на всю популяцию в целом. Такой подход позволяет более эффективно описывать динамику популяции и взаимодействие видов во многовидовых сообществах. Для сравнения: модель Лотки–Вольтерры [3], которая описывает взаимодействие двух видов, один из которых является хищником, а другой – жертвой, не может учесть кластеризацию в пространственной структуре распределения двух видов на общем ареале сосуществования.

Главный предмет изучения в текущей работе – нелинейное интегральное уравнение, которое описывает одновидовое стационарное биологическое сообщество. Это уравнение возникает при описании динамики популяции индивидов с использованием пространственных моментов. Пространственные моменты играют ключевую роль, позволяя эффективно исследовать сообщество при помощи его усредненных пространственных характеристик. Такой подход является мощным инструментом для анализа и понимания ди-

динамики биологических сообществ, поскольку позволяет рассмотреть не только индивидуальные характеристики организмов, но и их влияние на динамику сообщества в целом.

Основная цель работы заключается в исследовании вопросов о существовании и единственности решения нелинейного интегрального уравнения. Для достижения этой цели мы проводим исследование путем построения нелинейного интегрального оператора, который порождается рассматриваемым уравнением. Одним из ключевых шагов в этом исследовании является решение задачи о нахождении неподвижных точек этого оператора. Неподвижные точки представляют собой решения уравнения, которые остаются неизменными при применении оператора. Это позволяет нам анализировать структуру решений и устанавливать условия на существование и единственность решения исходного уравнения. Такой подход является важным шагом в понимании свойств нелинейных интегральных уравнений и может иметь практическое применение в различных областях, включая биологию, физику и математическую экологию.

2 Объяснение математических символов

символ математики	смысл
$A : A \subset \mathbb{R}^n$	область A (мера области A конечна)
X	конфигурация сообщества
d	смертность из-за неблагоприятных условий
b	плодовитость
d'	агрессивность
t	время
$m(x)$	ядро рождения (движения)
$\omega(x)$	ядро конкуренции
$\mathcal{C}_m$	корреляционная плотность порядка m
N	пространственный момент первого порядка
C	пространственный момент второго порядка
T	пространственный момент третьего порядка

3 Описание модели биологических сообществ

Рассматривается популяция неподвижных организмов в области $A \subset \mathbb{R}^n$, где $n = 1, 2, 3$. Примерами таких популяций могут служить сообщества растений, грибов или некоторых видов фитопланктона (фитопланктон движется вместе с водой, поэтому относительно воды он остается неподвижным). Предполагается, что мера области A конечна и отлична от нуля. Индивиды в этой популяции являются материальными точками и ничем не отличаются друг от друга, кроме положения в пространстве. Множество позиций всех индивидов обозначается за X и называется конфигурацией сообщества. Ясно, что это множество зависит от времени, то есть $X = X(t)$. Вообще говоря, на одном ареале могут сосуществовать несколько различных видов с различными характеристиками, но в данной работе будет рассмотрен одновидовой случай, что означает, что все индивиды в популяции принадлежат к одному и тому же виду и взаимодействуют друг с другом одним и тем же образом.

В модели, рассматриваемой в данной работе, время непрерывно. В каждый момент времени могут произойти два основных события: рождение нового индивида или смерть существующего индивида. Особи в сообществе могут умирать из-за неблагоприятных условий среды или из-за конкуренции с другими особями. Среда считается изотропной и действует на индивидов независимо от их положения. Смертность из-за неблагоприятных условий среды задается неотрицательной константой d . Рождение новых индивидов и конкуренция описываются функциями $m(x)$ и $\omega(x)$, соответственно, которые называются ядрами рождения(движения) и конкуренции. Это сферически симметричные функции, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\begin{aligned} m(x) &\geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} m(x) dx = 1, \lim_{|x| \rightarrow +\infty} m(x) = 0, \\ \omega(x) &\geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1, \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \omega(x) = 0. \end{aligned}$$

В многомерном случае $|x|$ обозначает длину вектора x , что представляет собой важное понятие при описании пространственной структуры популяции. Ядра рождаемости и конкуренции могут быть рассмотрены как плотности вероятностей случайных величин, описывающих процесс рождения новых и смерть уже существующих особей. Конкретно, индивид, находящийся в точке ξ , может породить новую особь в точке ξ' с вероятностью $m(\xi - \xi')$; индивид, находящийся в точке η , может убить особь, находящуюся в точке η' , с вероятностью $\omega(\eta - \eta')$. Таким образом, Ядра конкуренции и рождаемости описывают пространственную структуру конкуренции и рассеивания индивидов в процессе рождения, что важно для понимания динамики популяции в пространстве. Параметры b и d' являются неотрицательными вещественными числами и представляют смысл плодовитости и агрессивности вида соответственно.

Основная проблема использования конфигурации сообщества состоит в стохастичности данной модели. Действительно, каким бы малым не было число $\varepsilon > 0$, зная множество $X' = X(t - \varepsilon)$, мы не сможем узнать, каким будет множество $X = X(t)$. Это означает, что случайные факторы, такие как случайные рождения и смерти индивидов, играют существенную роль в определении состава популяции в любой момент времени. Такая стохастичность не позволяет понять, как влияют характеристики вида на сообщество и его изменение во времени. Для решения этой проблемы вводятся усредненные величины, описывающие популяцию. Эти усредненные величины позволяют получить более стабильное описание динамики популяции и понять основные тенденции в ее изменении, игнорируя стохастические колебания, что значительно упрощает анализ системы.

Зафиксируем момент времени t_0 и рассмотрим множество $X = X(t_0)$. Обозначим через $\mathbb{1}_{X \cap A}(x)$ характеристическую функцию множества $X \cap A$, а именно функцию, определяемую выражением

$$\mathbb{1}_{X \cap A}(x) = \begin{cases} 1, & x \in X \cap A \\ 0, & x \notin X \cap A \end{cases}$$

Фактически эта функция является индикатором того, что в конкретной точке области A находится особь из сообщества (при этом все особи, которые не находятся в рассматриваемой области, исключаются из рассмотрения).

Definition 1. Корреляционной плотностью порядка m в области A при фиксированной конфигурации сообщества X называется функция

$$C_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, X) = \frac{1}{\mu(A)} \sum_{x \in X \cap A} \mathbb{1}_{X \cap A}(x) \prod_{k=1}^{m-1} \mathbb{1}_{X \cap A}(x + \xi_k) \quad (3.1)$$

Здесь и всюду далее под $\mu(A)$ понимается мера множества A , то есть это количественная характеристика размера области A , которая позволяет оценить объем пространства, занимаемого этой областью. Для конкретной конфигурации сообщества корреляционная плотность порядка m является некоторой количественной характеристикой групп из m особей, живущих в области A . В этих группах сдвиг второй особи относительно первой равен ξ_1 , сдвиг третьей особи относительно первой равен ξ_2 и так далее. Например, $C_1(X)$ - это средняя плотность особей в области A , которая представляет собой отношение числа особей к мере области A . А $C_2(\xi, X)$ - это количество пар особей, в которых сдвиг второго индивида относительно первого равен ξ , деленное на меру области A .

Нетрудно показать, что корреляционная плотность порядка m полностью описывает сообщество из m особей, живущих на области A , для конкретной конфигурации X с точностью до сдвига и поворота области A . Действительно, предположим, что $X \cap A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и рассмотрим векторы сдвигов $x_i^j = x_j - x_i$. Тогда очевидно, что функция $C_m^X(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}) = C_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, X)$ будет иметь глобальные максимумы в точках $(x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^m), (x_2^1, x_2^3, \dots, x_2^m), \dots, (x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^{m-1})$. Это действительно так, поскольку в сообществе из m существ найдется максимум одна группа из m различных особей, расстояния между индивидами в которой соответствует заданным сдвигам. При этом, если аргументы корреляционной плотности равны реальным сдвигам особей, то функция C_m^X будет равна $\frac{1}{\mu(A)}$, в противном случае, она обратится в ноль. Таким образом, зная функ-

цию C_m при фиксированной конфигурации X , можно найти сдвиги x_i^j , а зная их, можно найти $X \cap A$ с точностью до сдвига и поворота.

Вообще говоря, формально корректно рассматривать, например, пару особей, в которой первый и второй индивид совпадают, однако намного удобнее такие ”пары”исключать из рассмотрения. Для этого корреляционные плотности корректируют так, чтобы они равнялись нулю в случае рассмотрения групп особей, в которых есть повторения. Перед проведением коррекции заметим, что с точки зрения математической постановки в группе из m особей есть повторения тогда и только тогда, когда среди аргументов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$ функции $C_m(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m-1}, X)$ существуют либо равные нулю, либо одинаковые величины. Это следует из того, что аргументы корреляционной плотности суть сдвиги особей относительно первого индивида. Введем функцию $\lambda(x)$ по правилу:

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & |x| = 0 \\ 1, & |x| \neq 0 \end{cases}$$

Функция $\lambda(x)$ равна нулю, если длина вектора сдвига x равна нулю, что означает, что два индивида находятся в одной и той же точке. В этом случае функция $\lambda(x)$ равна единице, если длина вектора сдвига x не равна нулю, то есть когда индивиды находятся в разных точках. Таким образом, функция $\lambda(x)$ играет роль фильтра, исключая из рассмотрения повторяющиеся индивиды, что делает корреляционные плотности более точными и удобными для анализа пространственной структуры популяции.

Используя данную функцию, можно определить скорректированные корреляционные плотности.

Definition 2. *Скорректированной корреляционной плотностью порядка m в области A при фиксированной конфигурации сообщества X называется функция*

$$\tilde{C}_m(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m-1}, X) = C_m(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m-1}, X) \prod_{k=1}^{m-1} \lambda(\xi_k) \prod_{k=1}^{m-2} \prod_{j=k+1}^{m-1} \lambda(\xi_k - \xi_j)$$

где $C_m(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m-1}, X)$ - корреляционная плотность порядка m в области A .

Корреляционная плотность порядка m описывает сообщество из m особей почти также, как и его конфигурация, за исключением возможных сдвигов и поворотов области, которые в случае гомогенной среды обитания не играют роли. Это означает, что корреляционные плотности сохраняют информацию о пространственном распределении особей в сообществе. Однако в реальных экосистемах среда обитания часто является гомогенной, и поэтому стохастические сдвиги и повороты не оказывают существенного влияния на характеристики сообщества. Однако корреляционные плотности можно попытаться осреднить, тем самым избавившись от стохастичности и перейдя к детерминированным величинам.

Definition 3. *Пространственным моментом порядка m в области A называется математическое ожидание скорректированной корреляционной плотности порядка m по всевозможным конфигурациям сообщества, то есть функция вида*

$$C_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}) = \int_{\mathcal{P}} \tilde{C}_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, X) dP(X)$$

Здесь $\mathcal{P}$ - вероятностное пространство на множестве всевозможных конфигураций сообщества, а $P(X)$ - вероятностная мера в этом пространстве.

Пространственные моменты, обозначаемые теми же буквами, что и корреляционные плотности, не вызывают путаницы, так как они не зависят от конкретной конфигурации. Это значит, что они имеют на один аргумент меньше, чем корреляционные плотности. Таким образом, мы перешли к детерминированным величинам, что значительно упрощает анализ сообщества.

4 Случай области бесконечной меры

Всюду ранее мы предполагали, что мера области $A \subset \mathbb{R}^n$ отлична от нуля и конечна. Далее рассматривается ситуация, когда сообщество распределено на области бесконечной меры, например, на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Такие ситуации часто возникают при анализе многих видов данных, например, социальных сетей или распределения частиц в физических системах.

В контексте данного исследования необходимо доопределить понятие корреляционной плотности порядка m . Это означает, что требуется уточнить, каким образом определена корреляционная связь между m объектами в данном сообществе.

Каждая корреляционная плотность C_m зависит от рассматриваемой области A , то есть $C_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, X) = C_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, X; A)$. Это означает, что корреляционная структура зависит от выбранной области A , как бы индивиды не были рассеяны в пространстве, что позволяет рассматривать только часть сообщества, а не всё пространство.

Для дальнейшего анализа можно взять последовательность областей конечной меры, которая "стремится" к области бесконечной меры, и доопределить корреляционную плотность как предел соответствующих функций. Это позволяет обобщить результаты на случай бесконечного пространства, используя предельный переход от конечных областей к бесконечной.

Конфигурация сообщества задана заранее для всей области A и не зависит от конкретной ее подобласти. Это предположение позволяет упростить анализ исследуемых свойств сообщества, сосредотачиваясь на общих характеристиках, независимо от выбора конкретной подобласти внутри A .

Definition 4. *Исчерпыванием области $A \subset \mathbb{R}^n$ конечной или бесконечной меры будем называть счетное семейство множеств $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k=1}^{+\infty}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1. $\forall k \in \mathbb{N} \implies$ множество D_k - открытое связное подмножество A конечной меры

$$2. \forall k \in \mathbb{N} \implies \overline{D_k} \subset D_{k+1}$$

$$3. \bigcup_{k=1}^{+\infty} D_k = A$$

Например, в качестве исчерпывания всего пространства $\mathbb{R}^n$ можно взять систему открытых шаров с общим центром, радиусы которых равны натуральным числам. Такая система обеспечивает покрытие всего пространства $\mathbb{R}^n$ без пропусков. Отметим, что данная система не универсальна и не позволяет исчерпать, например, бесконечную полосу на плоскости в случае $n = 2$.

Теперь, используя исчерпывания, можно расширить понятие корреляционной плотности на случай распределения особей в области бесконечной меры. Под исчерпываниями понимаются последовательности множеств, объединение которых дает всё пространство $\mathbb{R}^n$.

Definition 5. *Определение 5. Пусть сообщество индивидов распределено на области $A \subset \mathbb{R}^n$ бесконечной меры, а $\mathcal{D} = \{D_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - исчерпывание этой области. В таком случае корреляционной плотностью порядка m назовем следующую величину*

$$\mathcal{C}_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, X; A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{C}_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, X; D_k).$$

Далее аналогично случаю области конечной меры вводятся пространственные моменты, как математические ожидания соответствующих скорректированных корреляционных плотностей по пространству всевозможных конфигураций X . Для упрощения записи всюду, где это не вызовет недопонимания, мы не будем обозначать их зависимость от рассматриваемой области.

В рамках модели подразумевается, что, как и в реальном мире, любое биологическое взаимодействие имеет лишь конечный радиус. Это свойство означает, что взаимодействие между отдельными особями ограничено определенным расстоянием. Данный факт означает, что в сообществах, распределенных на области бесконечной меры, в среднем

не могут существовать устойчивые бесконечно большие пространственные структуры. Иными словами, если взаимные расстояния в группах из m особей станут больше некоторого конечного значения, то плотность распределения таких групп в области окажется равномерной в силу изотропности среды и отсутствия силы взаимодействия между индивидами. В терминах конфигураций сообщества этот факт означает, что вероятность появления конфигурации X , в котором группы из m достаточно далеко отдаленных друг от друга особей распределены в области неравномерно, нулевая. Тогда получим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое положительное число r_m , что для любого набора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|\xi_j| > r_m, j = \overline{1, m-1}$, верно следующее условие

$$C_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}) = q \equiv \text{const.}$$

Найдем константу q . Вообще говоря, из определения пространственных моментов в общем случае нетрудно понять, что для любого исчерпывания $\mathcal{D}$ области A имеет место следующее условие:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\mu(D_k))^{m-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} C_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}; D_k) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{m-1} = N^m \quad (4.1)$$

Действительно, количество всевозможных групп из m особей, находящихся на всех возможных расстояниях друг от друга, в сумме дает не что иное, как m -ю степень количества всех особей. Корректировка, заключающаяся в исключении из рассмотрения групп, в которых некоторые особи совпадают, на интеграл, в конечном итоге, не влияет, а значит, для усреднения таких величин утверждение остается верным с точностью до нормировки. Нормировка здесь, очевидно, сводится к делению результирующей величины на $(m-1)$ -ю степень меры рассматриваемой подобласти ареала распределения сообщества. В уравнении (4.1) интеграл понимается в обычном смысле, без повторного интегрирования.

Обозначим $B_{r_m} = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq r_m\}$. Приведенный выше предел можно переписать в виде

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\mu(D_k))^{m-1}} \left(\int_{(B_{r_m})^{m-1}} \mathcal{C}_m(\xi; D_k) d\xi + \int_{(\mathbb{R}^n)^{m-1} \setminus (B_{r_m})^{m-1}} \mathcal{C}_m(\xi; D_k) d\xi \right) = N^m. \quad (4.2)$$

Для упрощения записи введем вектор переменных $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1})$. Поскольку область A имеет бесконечную меру, с некоторого номера k_0 диаметр множеств D_k превысит r_m . Под диаметром здесь подразумевается супремум всевозможных расстояний между парами точек множества. Это значит, что

$$\forall k \geq k_0 \implies \int_{(B_{r_m})^{m-1}} \mathcal{C}_m(\xi; D_k) d\xi = \int_{(B_{r_m})^{m-1}} \mathcal{C}_m(\xi; D_{k_0}) d\xi \equiv \text{const}$$

Однако $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\mu(D_k))^{m-1} = +\infty$. В таком случае предел (4.2) эквивалентен пределу

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\mu(D_k))^{m-1}} \int_{(\mathbb{R}^n)^{m-1} \setminus (B_{r_m})^{m-1}} \mathcal{C}_m(\xi; D_k) d\xi = N^m$$

С другой стороны,

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^{m-1} \setminus (B_{r_m})^{m-1}} \mathcal{C}_m(\xi; D_k) d\xi = \frac{q}{\mu(D_k)} \cdot \mu(\Omega_k).$$

Здесь под множеством Ω_k подразумевается множество, на котором функция $\mathcal{C}_m(\xi; D_k)$ не равна нулю при $|\xi| > r_m$. Понятно, что мера множества Ω_k отличается от $(\mu(D_k))^{m-1}$ не более, чем на константу, равную $(\mu(B_{r_m}))^{m-1}$. Это означает, что в пределе при $k \rightarrow +\infty$ отношение $\frac{\mu(\Omega_k)}{(\mu(D_k))^{m-1}}$ стремится к единице. Тогда получим, что $q = N^m$.

Итак, можно утверждать, что

$$\lim_{\substack{|\xi_1| \rightarrow +\infty \\ |\xi_2| \rightarrow +\infty \\ \vdots \\ |\xi_{m-1}| \rightarrow +\infty}} \mathcal{C}_m(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}) = N^m$$

В частности,

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} C_2(x) = N^2. \quad (4.3)$$

Данное условие нам понадобится далее.

5 Оператор равновесия

Положение индивидов вида i может быть описано с использованием плотности вероятности $p_i(x)$, которая представляет собой сумму δ -функций, характеризующих местоположение индивидов данного вида. Вектор плотности видового распределения обозначается как $p(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x))$, представляющий пространственное распределение видов. Согласно выражению (3.1), для любого паттерна p можно определить плотности корреляции порядка m :

$$C_{i_1 \dots i_m}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, p) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A p_{i_1}(x) \prod_{j=2}^m p_{i_j}(x + \xi_{j-1}) dx$$

Первый момент:

$$N_i(p) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A p_i(x) dx$$

это плотность вида i в области A , т.е. среднее число индивидуумов вида i на единицу площади в области A .

Второй момент:

$$C_{ij}(\xi, p) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A p_i(x) [p_j(x + \xi) - \delta_{ij} \delta(\xi)] dx$$

это «попарная корреляция» индивидуумов из видов i и j на расстоянии ξ .

И третий момент:

$$T_{ijk}(\xi, \zeta, p) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A p_i(x) p_j(x + \xi) p_k(x + \zeta) dx$$

Пространственные моменты фактически зависят от времени, поскольку в каждый момент времени вероятность появления конфигурации X различна. Таким образом, можно говорить о динамике пространственных моментов, то есть их изменении во времени. Данный процесс был описан в [6], в этой же работе была выведена система интегродифференциальных уравнений динамики первых двух пространственных моментов, как самых интересных с точки зрения биологии. Когда рассматривается только один вид биологической популяции, эта система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (b - d)N - d' \int_{\mathbb{R}^n} C(\xi) w(\xi) d\xi \\ \frac{dC(\xi)}{dt} = bm(\xi)N + \int_{\mathbb{R}^n} bm(\xi') C(\xi + \xi') d\xi' - (d + d'\omega(\xi)) C(\xi) - \int_{\mathbb{R}^n} d'\omega(\xi') T(\xi, \xi') d\xi'. \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь как и выше константы b и d' суть плодовитость и агрессивность вида, константа d - смертность вида от неблагоприятных условий среды, а функции m и ω - ядра рождения и конкуренции соответственно.

С экологической точки зрения интересен случай, когда сообщество находится в состоянии равновесия, то есть когда стабилизируются его средние пространственные характеристики. Основная задача заключается в нахождении первых двух пространственных моментов в равновесном состоянии, что формулируется как поиск стационарной точки системы (5.1). Это означает, что мы ищем такие значения пространственных моментов, при которых изменение этих моментов по времени равно нулю, что свидетельствует о стабильности пространственной структуры. Уравнение (4.3) играет роль условия для искомого решения, помогая выбрать его из всех вариантов возможных решения. Оно описы-

вает условие равновесия системы и позволяет нам определить ненулевые стационарные точки, соответствующие устойчивому равновесному состоянию сообщества.

Поставленная задача всегда имеет нулевое решение, если сообщество вымерло. В этом случае все пространственные моменты и их производные по времени равны нулю, и выполняется уравнение (4.3). Поэтому требуется, чтобы решение было ненулевым, чтобы быть интересным. Это дополнительное условие используется для обоснования корректности выкладок и подтверждения того, что мы рассматриваем устойчивые состояния сообщества, а не его вымирание.

Динамика пространственных моментов связана таким образом, что каждый более высокий момент зависит от предыдущего: первый момент зависит от второго, второй - от третьего и так далее, то есть, сколько бы мы ни брали уравнений динамики и как бы мы не расширяли систему (5.1), в ней всегда будет на одно уравнение меньше, чем неизвестных величин. В работе [8] было предложено воспользоваться методом замыканий для решения данной проблемы.

Метод замыканий представляет собой способ уменьшения количества неизвестных в системе путем выражения неизвестный пространственный момент наибольшего порядка через остальные. Это позволяет сократить количество переменных и упростить решение системы уравнений (5.1). Замыкание определяется эмпирически на основе физических или биологических свойств задачи, которые позволяют выразить наибольший момент через меньшие.

Хотя метод замыканий вводит некоторую погрешность, правильно выбранное замыкание может сделать эту погрешность приемлемой. Это позволяет упростить анализ системы без значительной потери точности.

Замыкание второго момента сведет нашу модель к модели Ферхюльста [9], поскольку единственный способ, которым можно выразить второй момент через первый, учитывая условие (4.3), это $C(x) = N^2 \equiv \text{const}$. Данная модель хорошо известна и изучена многими математиками. Более того, модель Ферхюльста, как и модель Лотки-Вольтерры, не

учитывает пространственную структуру сообщества, что приводит к потере важных аспектов текущей модели. В частности, потеря пространственной структуры может привести к недооценке влияния биологических взаимодействий на динамику сообщества и снижению точности прогнозов.

Давайте теперь попробуем замкнуть третий пространственный момент. Подробное исследование этого вопроса и необходимые условия для замыкания представлены в работе [8]. Мы рассмотрим основные требования, которым должно соответствовать замыкание:

1. $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} T(x, y) = NC(y)$.
2. $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} T(x, y) = NC(x)$.
3. Если $C(x) \equiv N^2$, то $T(x, y) \equiv N^3$.

В данной работе рассматривается семейство замыканий вида:

$$T_{ijk}(\xi, \xi') = \frac{C_{ij}(\xi)C_{ik}(\xi')C_{jk}(\xi' - \xi)}{N_i N_j N_k} = \frac{C(\xi)C(\xi')C(\xi' - \xi)}{N^3} \quad (5.2)$$

Подставим замыкание третьей степени в уравнение второго момента:

$$0 = bm(\xi)N + b \int_R m(\xi') C(\xi + \xi') d\xi' - (d + d'w(\xi)) C(\xi) - d' \int_R w(\xi') \frac{C(\xi)C(\xi')C(\xi' - \xi)}{N^3} d\xi'$$

Это семейство удовлетворяет указанным условиям. Отметим, что в делении на N в определении этого семейства есть обоснование, так как предполагается, что решение задачи ненулевое, в частности $N \neq 0$.

Для упрощения дальнейших выкладок введем несколько обозначений:

1. Скалярное произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ записывается как $\langle f, g \rangle$. Это обозначение позволяет нам удобно работать с интегралами и произведениями функций.

2. Свертка двух функций $f(x - y)$ и $g(y)$, определенная как $\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$, обозначается как $[f * g]$. Это понятие свертки часто используется при решении уравнений в математическом анализе и теории вероятностей.
3. Введены новые функции $d'\omega(x) = \bar{\omega}(x)$ и $bm(x) = \bar{m}(x)$, где d' представляет агрессивность вида, b - его плодовитость, а $m(x)$ и $\omega(x)$ - ядра рождения и конкуренции соответственно.

В новых обозначениях после подстановки замыкания (5.2) с учетом того, что $\frac{dN}{dt} = 0$ и $\frac{dC}{dt} = 0$, система (5.1) примет вид

$$\begin{cases} 0 = (b - d)N - \langle C, \bar{\omega} \rangle, \\ 0 = \bar{m}N + [C * \bar{m}] - dC - \bar{\omega}C - \frac{C}{N^3}[\bar{\omega}C * C] \end{cases} \quad (5.3)$$

Разделим оба уравнения системы (5.3) на N^2 и обозначим $\bar{C} = \frac{C}{N^2}$, $\langle \bar{\omega}, \bar{C} \rangle = Y$. Тогда из первого уравнения получим

$$N = \frac{b - d}{\langle \bar{\omega}, \bar{C} \rangle} = \frac{b - d}{Y}.$$

Отметим, что $C(x)$ не может быть меньше нуля в силу биологического смысла второго пространственного момента. Второй пространственный момент отображает среднее количество пар особей, находящихся на расстоянии x друг от друга, для всех возможных конфигураций. Таким образом, если $C(x) < 0$, это нарушает физическую интерпретацию этого момента. Поэтому число Y , при условии, что $C \not\equiv 0$ и $\bar{\omega}(x) \geq 0$, не может быть равно нулю. Следовательно, деление на Y корректно. Подставив данное выражение во второе уравнение системы, получаем:

$$0 = \frac{\bar{m}Y}{b - d} + [\bar{C} * \bar{m}] - d\bar{C} - \bar{\omega}\bar{C} - \frac{b - d}{Y}\bar{C}[\bar{\omega}\bar{C} * \bar{C}].$$

Сделаем замену переменных: $\bar{C} = Q + 1$. Тогда после упрощения получим уравнение

$$(d + \bar{w})(Q + 1) = [\bar{m} * (Q + 1)] + \frac{\bar{m}}{b - d}Y - \frac{(b - d)(Q + 1)}{Y}[\bar{w}(Q + 1) * (Q + 1)].$$

- Раскроем скобки в правой части $[\bar{m} * (Q + 1)]$:

$$[\bar{m} * (Q + 1)] = [\bar{m} * Q] + [\bar{m} * 1] = [\bar{m} * Q] + b.$$

- Раскроем скобки в правой части $[\bar{w}(Q + 1) * (Q + 1)]$:

$$\begin{aligned} [(Q + 1) * \bar{w}(Q + 1)] &= [Q * \bar{w}Q] + [1 * \bar{w}Q] + [Q * \bar{w}] + [1 * \bar{w}] \\ &= [Q * \bar{w}Q] + \langle \bar{w}, Q \rangle + [Q * \bar{w}] \langle \bar{w}, 1 \rangle \\ &= [Q * \bar{w}Q] + [Q * \bar{w}] + Y. \end{aligned}$$

Подставим полученную формулу в уравнение:

$$(d + \bar{w})(Q + 1) = [\bar{m} * Q] + b + \frac{\bar{m}}{b - d}Y - \frac{(b - d)(Q + 1)}{Y}([Q * \bar{w}Q] + [Q * \bar{w}] + Y). \quad (5.4)$$

Раскроем скобки:

$$dQ + \bar{w}Q + d + \bar{w} = [\bar{m} * Q] + b + \frac{\bar{m}Y}{b - d} - bQ + dQ - b + d - \frac{(b - d)(Q + 1)}{Y}([Q * \bar{w}Q] + [Q * \bar{w}]).$$

где $Y = Y(Q) = \langle \bar{w}, Q + 1 \rangle$. Будем называть (5.4) уравнением равновесия.

Известно, что $Q(x) = \frac{C(x)}{N^2} - 1$, однако $C(x) = C_2(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} N^2$ (в силу (4.3)).

Это означает, что функция Q должна стремиться к нулю при $|x| \rightarrow +\infty$. Таким образом, исходная задача сводится к нахождению функции, которая стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет уравнению равновесия.

Перед тем как перейти к дальнейшему анализу этого уравнения, отметим один важный факт.

Theorem 1. Если уравнение (5.4) имеет решение, то оно также имеет радиально-симметричное.

Доказательство. Если $\tilde{Q}$ является решением (5.4), то это означает, что эта функция удовлетворяет уравнению равновесия. Тожество сохранится, если мы возьмем усреднение его левой и правой частей по поверхности n -мерной сферы. Другими словами, для любого $r > 0$ выполняется равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|S_r|} \oint_{S_r} (d + \bar{w})(\tilde{Q} + 1) dS = \\ & = \frac{1}{|S_r|} \oint_{S_r} \left([\bar{m} * \tilde{Q}] + b + \frac{\bar{m}}{b-d} Y - \frac{(b-d)(\tilde{Q} + 1)}{Y} ([\tilde{Q} * \bar{w}\tilde{Q}] + [\tilde{Q} * \bar{w}] + Y) \right) dS, \end{aligned}$$

где $Y = \langle \bar{w}, \tilde{Q} + 1 \rangle$, а $|S_r| = \frac{n\pi^{n/2}r^{n-1}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$

Введем функцию $V = V(x) = \frac{1}{|S_{|x|}|} \oint_{S_{|x|}} \tilde{Q} dS$. Далее учтем, что константу и, вообще говоря, любую радиально-симметричную функцию можно вынести за знак интегрирования по сфере. Кроме того, используя переход к сферическим координатам, а также теорему Фубини, нетрудно показать, что интегрирование по сфере можно внести внутрь свертки. В итоге имеем

$$(d + \bar{w})(V + 1) = [\bar{m} * V] + b + \frac{\bar{m}}{b-d} Y - \frac{(b-d)(V + 1)}{Y} ([Q * \bar{w}V] + [Q * \bar{w}] + Y).$$

Остается лишь сказать, что функция V является радиально-симметричной, и взять еще раз усреднение по сфере произвольного радиуса, чтобы получить верное равенство:

$$(d + \bar{w})(V + 1) = [\bar{m} * V] + b + \frac{\bar{m}}{b-d} Y - \frac{(b-d)(V + 1)}{Y} ([V * \bar{w}V] + [V * \bar{w}] + Y).$$

□

Теорема 1 демонстрирует корректность формулировки задачи. Биологический смысл второго пространственного момента требует, чтобы он был сферически симметричной функцией.

Уравнение (5.4) можно переписать в виде $\mathcal{A}Q = Q$, где оператор $\mathcal{A}$ действует по правилу

$$\mathcal{A}f = \frac{\frac{Y\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega} + [\bar{m} * f] - \frac{(b-d)(f+1)}{Y} ([f * \bar{w}f] + [f * \bar{w}])}{\bar{\omega} + b}. \quad (5.5)$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем явное упоминание зависимости Y от f , однако она всегда подразумевается. Оператор (5.5) будет называться оператором равновесия. Таким образом, задача о нахождении решения уравнения (5.4) сводится к поиску неподвижной точки оператора (5.5). Для удобства вычислений мы ограничимся случаем только одной биологической популяции, но все теоремы, представленные в этой статье, легко обобщаются на случай $n = 2, 3, \dots$.

6 Вспомогательные условия

6.1 Вспомогательные утверждения

Для дальнейшей работы нам понадобятся следующие утверждения.

Lemma 1. Пусть f - измеримая функция, $g \in L_1(\mathbb{R})$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}$ верно $|f(x)| \leq g(x)$, тогда $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. Будем называть измеримые функции, принимающие не более чем счетное число значений, простыми. Известно, что функция измерима тогда и только тогда, когда она может быть представлена как равномерный предел простых функций. Кроме того, функция интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда она может быть представ-

ленна в виде равномерного предела простых функций, каждая из которых интегрируема ([10]).

$g \in L_1(\mathbb{R})$, то есть $\forall k \in \mathbb{Z} \implies g \in L_1([k; k+1])$, причём $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} g(x) dx < +\infty$. Фиксируем $\forall k \in \mathbb{Z}$. В силу интегрируемости g на отрезке $[k; k+1]$ существует последовательность интегрируемых простых функций $\{g_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} : g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{x \in [k; k+1]} g(x)$. В свою очередь f - измерима, то есть для неё существует последовательность простых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} : f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{x \in [k; k+1]} f(x)$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N, \forall x \in [k; k+1] \implies \begin{cases} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 \\ |g(x) - g_n(x)| \leq \varepsilon/2. \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{cases} |f_n(x)| \leq |f(x)| + \varepsilon/2 \\ |g(x)| \leq |g_n(x)| + \varepsilon/2 \end{cases} \implies |f_n(x)| \leq |g_n(x)| + \varepsilon$$

Из свойства мажорируемости следует интегрируемость f_n на отрезке $[k; k+1]$ при любом натуральном n , что влечёт интегрируемость и самой функции f на том же отрезке. Кроме того, получаем, что $\int_k^{k+1} |f(x)| dx \leq \int_k^{k+1} g(x) dx$, то есть по признаку сравнения ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |f(x)| dx < +\infty$, что означает, что $f \in L_1(\mathbb{R})$. $\square$

Corollary 1. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, а g - ограничена и измерима, то $fg \in L_1(\mathbb{R})$.

Lemma 2. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, тогда f ограничена.

Доказательство. По условию $\forall \varepsilon > 0, \exists R = R(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x| > R \implies |f(x)| \leq \varepsilon$. На отрезке $[-R; R]$ функция f ограничена по теореме Вейерштрасса. Таким образом, она ограничена всюду. $\square$

Lemma 3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, тогда f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство. Исходя из стремления функции f к нулю на бесконечности, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R = R(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x| > R \implies |f(x)| \leq \varepsilon/4.$$

Таким образом,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| > R, |y| > R \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$$

На отрезке $[-R - 1; R + 1]$ непрерывная функция f равномерно непрерывна по теореме Кантора, то есть

$$\exists \delta' = \delta'(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta' \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2.$$

Положим $\delta = \min \{\delta', 1/2\}$, тогда, если $x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta$, то возможны три случая:

1. $x, y \in [-R - 1; R + 1]$. Тогда $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$.
2. $x, y \notin [-R - 1; R + 1]$. Тогда $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$.
3. $x \in [-R - 1; R + 1], y \notin [-R - 1; R + 1]$ или наоборот. Тогда

$$\exists z \in (-R - 1; -R) \cup (R; R + 1) : \begin{cases} |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon/2 \\ |f(x) - f(z)| \leq \varepsilon/2, \end{cases}$$

то есть $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Таким образом, f равномерно непрерывна в $\mathbb{R}$. □

Лемма 4. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall h \in \mathbb{R} : |h| \leq \delta \implies \int_{\mathbb{R}} |f(x + h) - f(x)| dx \leq \varepsilon$$

Доказательство. См. ([11]). □

Theorem 2 (Критерий Рисса). Множество $K \subset L_p(\mathbb{R})$ является предкомпактом тогда и только тогда, когда

1. K - равномерно ограничено, то есть $\exists M > 0 : \forall f \in K \implies \|f\|_p \leq M$
2. K - равномерно непрерывно в смысле $L_p(\mathbb{R})$, то есть $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall h \in \mathbb{R} : |h| \leq \delta, \forall f \in K \implies$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Основную идею доказательства можно найти в ([11]). □

Theorem 3 (Фубини). Пусть для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существует интеграл $\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy = F(x)$, причем $\int_{\mathbb{R}} F(x) dx < +\infty$, тогда существуют интегралы $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dx dy$ и $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$, а кроме того, верно равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x, y) dx dy.$$

Доказательство. См. ([10]) □

Remark 1. В дальнейших выкладках мы будем пользоваться следующим очевидным утверждением:

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}), \forall y \in \mathbb{R} \implies \int_{\mathbb{R}} |f(x+y)| dx = \|f\|_{L_1}.$$

Также мы будем считать известным тот факт, что функция суммируема тогда и только тогда, когда суммируем ее модуль.

Remark 2. Напомним, что ядра рождения и конкуренции (m и ω) являются радиально-симметричными стремящимися к нулю на бесконечности суммируемыми функциями, норма которых в пространстве $L_1(\mathbb{R})$ равна единице. Всюду далее дополнительно будем

считать, что $m, \omega \in C(\mathbb{R})$. Исходя из леммы 2 и леммы 3 видно, что в таком случае m и ω ограничены и равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

Remark 3. Под $B(R)$ при $R > 0$ в дальнейшем будем понимать замкнутый шар радиуса R в пространстве $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, то есть множество

$$B(R) = \{f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) : \|f\|_{\mathcal{L}_1} \leq R\}$$

6.2 Введение вспомогательного пространства

В этой главе забежим немного вперёд и рассмотрим, зачем вообще нужно вводить новое пространство.

В данной работе рассмотрено замыкание, названное замыканием третьей степени из-за его структуры, включающей тройное умножение второго момента, выраженное как $C(\xi)C(\xi')C(\xi' - \xi)$. Это основная черта, которая отличает его от других замыканий, и из-за которой в дальнейших преобразованиях всплывают слагаемые с самосвёрткой второго момента, помноженные на второй момент. Эти слагаемые являются основным камнем преткновения при изучении данного замыкания в обычном пространстве $\mathcal{L}_1$. Поскольку нельзя гарантировать, что самосвертка функции, умноженная на саму функцию, все еще находится в пространстве $\mathcal{L}_1$ и сохраняет интегрируемость. Приведём пример такого слагаемого:

$$f[f * wf]$$

В процессе доказательства существования решения необходимо будет оценить постоянную L данного (и других) слагаемых. Соответственно, для пространства $\mathcal{L}_1$ в определённый момент доказательства получаем следующий результат (переход между двойным и

повторным интегралами возможен благодаря теореме Фубини):

$$\begin{aligned}\|f_1[f_1 * w f_1] - f_2[f_1 * w f_1]\|_{\mathcal{L}_1} &= \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(y) w(y) f_1(x - y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x)) \cdot f_1(y) w(y) f_1(x - y)| dx dy\end{aligned}$$

Дальнейшим шагом, учитывая, что функции f_1, f_2 тут можно ограничить некоторым числом R , а функция w по условию задачи ограничена коэффициентом d' , предполагается оценка полученного двойного интеграла сверху:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x)) \cdot f_1(y) w(y) f_1(x - y)| dx dy \leq d' R^2 \|f_1 - f_2\|_{\mathcal{L}_1}$$

Однако, полученный двойной интеграл содержит под своим знаком произведение трёх функций, принадлежащих пространству $\mathcal{L}_1$. При этом, любые перестановки, проведённые при помощи теоремы Фубини, всё равно оставляют нас с интегралом, под знаком которого содержатся произведение двух f . Поэтому подобная оценка, вообще говоря, не является корректной. Таким образом, для доказательства существования и единственности решения полученного операторного уравнения нам необходимо будет ввести специальное пространство функций, на котором мы будем рассматривать все возможные решения и которое позволит нам оценить данный интеграл.

Пусть $f \in \mathcal{L}_1$ и f имеет ограниченный супремум. Норма в таком случае будет равна:

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right\}$$

Теперь докажите, что эта норма корректно определена.

1. (Неотрицательность) : $\forall f \in \mathcal{L}_1$, очевидно, что $\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \geq 0$. Это потому, что $\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \geq 0$ и $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \geq 0$. Если $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, то $\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 0$ и $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 0$, получится $\|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = 0$.

2. (Однородность) : $\forall f \in \mathcal{L}_1, \forall c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|cf\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |cf(x)|, \int_{\mathbb{R}} |cf(x)| dx \right\} \\ &= \max \left\{ |c| \cdot \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, |c| \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right\} \\ &= |c| \cdot \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right\} \\ &= |c| \cdot \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}\end{aligned}$$

3. (Треугольное неравенство) : $\forall f, g \in \mathcal{L}_1$

$$\begin{aligned}\|f + g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) + g(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)| dx \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right\} + \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|, \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \right\} \\ &= \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}\end{aligned}$$

Все дальнейшие оценки будем проводить по этой норме. Данная норма порождает нормированное пространство $\tilde{\mathcal{L}}_1 := (\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1})$. Мы используем $d(f, g) := \|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$, $f, g \in \tilde{\mathcal{L}}_1$ для представления метрики двух элементов в нормированном пространстве $\tilde{\mathcal{L}}_1$. Теперь докажите, что эта метрика $d(f, g)$ корректно определена.

1. (Неотрицательность) : $\forall f, g \in \tilde{\mathcal{L}}_1$, очевидно, что $d(f, g) \geq 0$. Это потому, что

$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \geq 0$ и $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \geq 0$. Если $d(f, g) = \|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = 0$, то $\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| = 0$ и $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx = 0$, получится $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

2. (Симметрия) : $\forall f, g \in \tilde{\mathcal{L}}_1$

$$\begin{aligned}d(f, g) &= \|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - f(x)|, \int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)| dx \right\} = \|g - f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \\ &= d(g, f)\end{aligned}$$

3. (Треугольное неравенство) : $\forall f, g, h \in \tilde{\mathcal{L}}_1$

$$\begin{aligned}
d(f, g) + d(g, h) &= \|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|g - h\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \\
&= \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x) - h(x)|, \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x) - h(x)| dx \right\} \\
&\geq \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| dx \right\} \\
&= \|f - h\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = d(f, h)
\end{aligned}$$

Чтобы доказать, что нормированное пространство $\tilde{\mathcal{L}}_1 = (\mathcal{L}_1, \|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1})$ является банаховым пространством, нам нужно доказать, что нормированное пространство $\tilde{\mathcal{L}}_1$ полно в смысле метрики d , индуцированной нормой $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$.

Definition 6 (Последовательность Коши). *Последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства (X, ρ) называется фундаментальной, если она удовлетворяет условию Коши:*

Для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное N , что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $n, m > N$.

Theorem 4. *Нормированное пространство $\tilde{\mathcal{L}}_1$ полно в смысле метрики d .*

Доказательство. Теперь рассмотрим последовательность Коши $\{f_n\}$. Поскольку эта последовательность является последовательностью Коши, для заданного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N , такое что для всех $n, m \geq N$ выполняется неравенство:

$$d(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)| dx \right\} < \varepsilon$$

Поскольку норма $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$ состоит из двух частей, а именно максимального значения модуля функции и интеграла модуля функции, эти две части теперь рассматриваются отдельно.

- (Максимальное абсолютное значение функции) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N : d_1(f_n, f_m) = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \text{ Поэто-}$$

му для $\forall x \in \mathbb{R}$, имеем $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, другими словами, для всех фиксированных $x \in \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ является последовательностью Коши в $\mathbb{R}$. Поскольку множество действительных чисел представляет собой полное пространство, последовательность Коши $\{f_n(x)\}$ должна сходиться к некоторому вещественному числу из $\mathbb{R}$. Предположим, что это $\{f(x)\}$.

Для всех фиксированных $x \in \mathbb{R}$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, если m стремится к положительной бесконечности, то для фиксированных $x \in \mathbb{R}$ имеется $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Поэтому для $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n > N : d_1(f_n, f) = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$. Теперь у нас есть предельная формула функциональной последовательности: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$. Для $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$, имеем $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, поэтому f интегрируема на $\mathbb{R}$, а это означает, что предел последовательности функций $\{f_n\}$ находится в пространстве $\tilde{\mathcal{L}}_1$.

- (Интеграл от абсолютного значения функции) :

Если последовательность функций $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}_1$ является последовательностью Коши, то: $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\|_{\mathcal{L}_1} = 0$. Можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subseteq \{f_n\}$, такую что: $d_2(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) = \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{\mathcal{L}_1} < \frac{1}{2^k}, k \geq 1$. Для любого $[x_1, x_2] \subseteq \mathbb{R}, \mu([x_1, x_2]) < \infty$ имеем: $\int_{x_1}^{x_2} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| dx \leq \frac{x_2 - x_1}{2^k}$, откуда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| dx \leq (x_2 - x_1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = x_2 - x_1 < \infty$, что означает сходимость последовательности функций. Из произвольности $[x_1, x_2]$ следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|$ почти всюду сходится на $[x_1, x_2]$, откуда: $f_{n_k}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) + f_{n_1}(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$ сходится к некоторой измеримой функции $f(x)$. Далее докажем, что $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} f$.

Согласно определению последовательности Коши: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n, n_k > N$: $\|f_n - f_{n_k}\|_{\mathcal{L}_1} < \varepsilon$. Для неотрицательной последовательности измеримых функ-

ций $\{|f_n - f_{n_k}|\}$ при $n > N$ используем лемму Фату:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_1} |f_n - f| dx &= \int_{\mathcal{L}_1} \underline{\lim} |f_{n \rightarrow \infty} - f_{n_k}| dx \\ &\leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{L}_1} |f_n - f_{n_k}| dx \\ &= \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |f_n - f_{n_k}| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Следовательно: $f_n - f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}) \Rightarrow f = f_n - (f_n - f) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, и: $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}_1} f$.

Рассмотрим последовательность Коши $\{f_n\}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m > N, \forall x \in \mathbb{R} :$
 $d(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)| dx \right\} < \varepsilon$. По-
 этому для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ является последовательностью Коши
 в $\mathbb{R}$, пусть он сходится к $f(x)$. Если m стремится к положительной бесконечности, то
 для фиксированных $x \in \mathbb{R}$ имеется $\|f_n(x) - f(x)\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} < \varepsilon$. Поэтому для $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n >$
 $N : d(f_n, f) = \|f_n(x) - f(x)\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \right\} < \varepsilon$.
 Теперь у нас есть формула функциональной последовательности: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$.

Для всех функций $f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, как в случае первой нормы - максимальное абсо-
 лютное значение функции, так и в случае второй нормы - интеграл от абсолютного зна-
 чения функции, являются хорошо определенными. Аналогично это верно и для предела
 функций $f(x)$, поэтому функция $f(x)$ действительно принадлежит пространству $\tilde{\mathcal{L}}_1$. $\square$

Definition 7. *Банахово пространство – нормированное векторное пространство, полное по метрике, порождённой нормой.*

В новом определении нормы это функциональное пространство $\tilde{\mathcal{L}}_1$ является пространством Банаха.

7 Неподвижная точка оператора равновесия

7.1 Существование неподвижной точки оператора равновесия

Лемма 5. Оператор $\mathcal{B}_\omega f = [\omega * f]$, действующий из $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$ в $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$, является компактным.

Доказательство. Пусть $M > 0$. Рассмотрим любую функцию $f \in B(R)$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_\omega f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \omega(y) f(x-y) dy \right), \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \omega(y) f(x-y) dy \right| dx \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x)) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \omega(y) dy \right), \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\omega(y) f(x-y)| dy dx \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x)) \cdot \|\omega\|_{\mathcal{L}_1}, \int_{\mathbb{R}} |\omega(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx dy \right\} \\ &= \|\omega\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x)), \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right\} \\ &= \|\omega\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq R \end{aligned}$$

Поскольку свёртка - это суммируемая функция, внутренний интеграл в повторном интеграле существует и суммируем для любого x . Это позволяет применить теорему Фубини для смены порядка интегрирования. Оценим выражение $\int_{\mathbb{R}} |[\mathcal{B}_\omega f](x+h) - [\mathcal{B}_\omega f](x)| dx$ сверху:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} |[\mathcal{B}_\omega f](x+h) - [\mathcal{B}_\omega f](x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} [\omega(x+h-y) - \omega(x-y)] f(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\omega(x+h-y) - \omega(x-y)| \cdot |f(y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |\omega(x+h-y) - \omega(x-y)| dx dy \leq \epsilon \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \epsilon R \end{aligned}$$

Значит, при достаточно малых h значение выражения также мало. Итак, образ $B(R)$ под действием оператора $\mathcal{B}_\omega$ равномерно ограничен и равностепенно непрерывен в смысле $\tilde{\mathcal{L}}_1$.

По критерию Рисса это означает, что множество предкомпактно. Таким образом, оператор $\mathcal{B}_\omega$ переводит ограниченные множества в предкомпактные, а следовательно, является компактным. $\square$

Corollary 2. Очевидно, что оператор $\mathcal{B}_m f = [m * f]$ также компактен.

Lemma 6. Оператор $\mathcal{C}f = \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \omega(y) f(y) dy + \psi(x)$, где φ, ψ - непрерывные суммируемые функции, является компактным, как действующий из $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$ в $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$.

Доказательство. По леммам 2 и 4, функции φ и ψ являются ограниченными и непрерывными в смысле $\mathcal{L}_1$ на $\mathbb{R}$. Воспользуемся критерием Рисса. Пусть $M > 0, f \in B(M)$.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \omega(y) f(y) dy + \psi(x) \right), \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx \left| \int_{\mathbb{R}} \omega(y) f(y) dy \right| + \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx \right\} \\
&\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} (\varphi(x) f(x)) \cdot \int_{\mathbb{R}} \omega(y) dy + \sup_{x \in \mathbb{R}} (\psi(x)), \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \cdot |\omega(y) f(y)| dx dy + \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx \right\} \\
&\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} (\varphi(x)) \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x)) \cdot \int_{\mathbb{R}} \omega(y) dy + \sup_{x \in \mathbb{R}} (\psi(x)), \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \cdot |\omega(y) f(y)| dx dy + \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx \right\} \\
&\leq M \|\omega\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \|\varphi(x)\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|\psi(x)\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}
\end{aligned}$$

Итак, оператор $\mathcal{C}$ компактен. $\square$

Оператор (5.5) можно представить в виде суммы $\mathcal{A} = \mathcal{K} + \mathcal{S}$, где

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}f &= \frac{\frac{Y\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega} + [\bar{m} * f] - \frac{b-d}{Y}[\bar{\omega} * f]}{\bar{\omega} + b} \\
\mathcal{S}f &= -\frac{b-d}{Y} \cdot \frac{f([\bar{\omega} * f] + [\bar{\omega} f * f])}{\bar{\omega} + b}.
\end{aligned}$$

Идея такого разложения заключается в попытке отделить компактную часть оператора от некомпактной. В определении введенных выше операторов фигурируют дроби,

знаменатели которых зависят от f (через Y). Этот факт может вызвать затруднения в исследовании операторов на компактность. Однако имеют место следующие леммы.

Лемма 7. Пусть $R < \frac{1}{\|\omega\|_C}$ и $d' > 0$, тогда дробь $\frac{1}{Y}$ равномерно по f отделена от нуля и бесконечности при всех $f \in B(R)$.

Доказательство. Рассмотрим любую функцию $f \in B(R)$. Согласно формуле (4.3), так как

$$Y = Y(f) = \int_{\mathbb{R}} (f(x) + 1) \bar{\omega}(x) dx = d' + \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\omega}(x) dx$$

то $Y \geq d' - \|\bar{\omega}\|_C \cdot \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$, значит, учитывая, что по условию $1 > R\|\omega\|_C$, получим

$$\frac{1}{Y} \leq \frac{1}{d' (1 - \|\omega\|_C \cdot \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1})} \leq \frac{1}{d' (1 - R\|\omega\|_C)} < +\infty.$$

С другой стороны $Y \leq d' + \|\bar{\omega}\|_C \cdot \|f\|_1$, значит

$$\frac{1}{Y} \geq \frac{1}{d' (1 + \|\omega\|_C \cdot \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1})} \geq \frac{1}{d' (1 + R\|\omega\|_C)} > 0.$$

□

Лемма 8. Пусть $b > 0$, $d' > 0$, тогда, при условии, что $R < \frac{1}{\|\omega\|_C}$, функция

$$g(x) = \frac{1}{\bar{\omega}(x) + b}.$$

непрерывна и отделена от нуля и бесконечности равномерно по f при всех $\tilde{\mathcal{L}}_1$.

Доказательство. Исходя из непрерывности функции $\omega(x)$, легко получить непрерывность функции $g(x)$, очевидно, функция $g(x)$ равномерно по f при всех $\tilde{\mathcal{L}}_1$.

Рассмотрим функцию $\frac{1}{g(x)} = \bar{\omega}(x) + b = d'\omega + b \implies d'\omega + b \geq d'\|\omega\|_C - b$, получим

$$g(x) = \frac{1}{d'\omega + b} \leq \frac{1}{d'\|\omega\|_C - b} < +\infty.$$

С другой стороны $d'\omega + b \leq d'\|\omega\|_C + b$, значит

$$g(x) = \frac{1}{d'\omega + b} \geq \frac{1}{d'\|\omega\|_C + b} > 0.$$

□

Theorem 5. Пусть $d > b > 0, d' > 0$, тогда, при условии, что $R < \frac{1}{\|\omega\|_C}$, оператор $\mathcal{K}$ определен, как действующий из $B(R)$ в $\tilde{\mathcal{L}}_1$ и является компактным.

Доказательство. По лемме 8 функция $g(x)$ равномерно по f ограничена и непрерывна, то есть, измерима в $\mathbb{R}$. Это значит, что домножение ее на любую суммируемую функцию не выводит из класса $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$ (следствие 1).

$\mathcal{K}$ можно представить в виде

$$\mathcal{K}f = g \cdot \left(\mathcal{C} + \mathcal{B}_{\bar{m}} - \frac{b-d}{Y} \mathcal{B}_{\bar{\omega}} \right) f,$$

где

$$\mathcal{C}f = \frac{Y\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega},$$

$$\mathcal{B}_{\bar{m}}f = [\bar{m} * f],$$

$$\mathcal{B}_{\bar{\omega}}f = [\bar{\omega} * f].$$

При условии

$$\|f\|_1 \leq R < \frac{1}{\|\omega\|_C}$$

выражение $-\frac{b-d}{2Y}$ равномерно ограничено по f в силу леммы 7. По леммам 5 и 6 операторы $\mathcal{C}, \mathcal{B}_{\bar{m}}$ и $\mathcal{B}_{\bar{\omega}}$ действуют в $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$ и являются компактными. В таком случае $-\frac{b-d}{2Y} \mathcal{B}_{\bar{\omega}}$ тоже компактный оператор. Сумма компактных операторов компактна, и домножение на функцию $g(x)$ на компактность не влияет. Таким образом, $\mathcal{K}$ компактен. □

Theorem 6 (Лере-Шаудер). Если оператор $\mathcal{A}$, определенный на замкнутом шаре B банахова пространства, является компактным и $\mathcal{A}[\partial B] \subset B$, то $\exists f \in B : f = \mathcal{A}f$.

Доказательство. Доказательство можно найти, например в [12]. Отметим лишь, что оно опирается на так называемое понятие вращения отображения. В частности, если вращение компактного оператора на границе шара не равно нулю, то у него существуют неподвижные точки. $\square$

Theorem 7. В условиях теоремы 5, если $\rho = 1 - R\|\omega\|_C > 0$, то $\exists d' \in (0; \frac{3}{4}\rho)$ такое, что оператор $\mathcal{K}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку.

Доказательство. Оценим норму образа функции f из $B(R)$ под действием оператора $\mathcal{K}$. Для начала проведем оценку для Y . Так как $0 < R\|\omega\|_C < 1$, то $1 + R\|\omega\|_C < 2$, тогда

$$0 < d'\rho = d'(1 - R\|\omega\|_C) \leq Y \leq d'(1 + R\|\omega\|_C) < 2d'.$$

Таким образом

$$\frac{1}{d'\rho} \geq \frac{1}{Y} > \frac{1}{2d'}.$$

Значит, для функции $g_Y(x)$, определенной в лемме 8, верна следующая оценка:

$$|g_Y(x)| = \left| \frac{1}{\bar{\omega} + b} \right| < \frac{1}{b}.$$

Оценим норму свертков, входящих в определение оператора $\mathcal{K}$.

$$\begin{aligned} \|[\bar{m} * f]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \bar{m}(x-y)f(y)dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\bar{m}(x-y)| \cdot |f(y)| dy dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{R}} |\bar{m}(x-y)| dx dy = \|\bar{m}\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq bR. \end{aligned}$$

Смена порядка интегрирования возможна в силу применения теоремы Фубини (поскольку свертка суммируемых функций суммируема). Аналогично

$$\|[\bar{\omega} * f]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq d'R.$$

В итоге получим следующие оценки

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{K}f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \frac{Y\bar{m}(x)}{b-d} \right| + |\bar{\omega}(x)| + |[\bar{m} * f](x)| + \left| \frac{b-d}{Y} [\bar{\omega} * f](x) \right|}{|\bar{\omega}(x) + b|} dx \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{2bd'}{b-d} |m(x)| + d' |\omega(x)| + |[\bar{m} * f](x)| + \frac{b-d}{\rho} |[\bar{\omega} * f](x)|}{b} dx \leq \\
&\leq \frac{\frac{2bd'}{b-d} + d' + bR + \frac{b-d}{\rho} d'R}{b} = \frac{d' \left(\frac{2b}{b-d} + 1 \right) + \left(b + \frac{b-d}{\rho} d' \right) R}{b}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{d' \left(\frac{2b}{b-d} + 1 \right)}{b} \\
\eta &= \frac{b + \frac{d'}{\rho} (b-d)}{b}
\end{aligned}$$

тогда $\|\mathcal{K}f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \xi + \eta R$. Видно, что $\eta < 1$ при $\frac{b-d}{\rho} d' < 0 \iff b < d$. Кроме того, $\xi \xrightarrow{d' \rightarrow 0} 0$

Из этих двух фактов следует, что

$$\exists d' \in \left(0; \frac{3}{4}\rho \right) : \forall f \in B(R) \implies \|\mathcal{K}f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} < R \iff \mathcal{K}f \in B(R)$$

Итак, найдется настолько малое число $d' \in (0; \frac{3}{4}\rho)$, при котором оператор $\mathcal{K}$ переводит шар $B(R)$ внутрь шара $B(R)$. Тогда, учитывая его компактность в этом шаре, по теореме Лере-Шаудера этот оператор имеет в $B(R)$ неподвижную точку. $\square$

Remark 4. Отметим, что в дальнейших теоремах существенен тот факт, что образ $B(R)$ под действием оператора $\mathcal{K}$ переходит в некоторый замкнутый подшар $B' \subset B(R)$, такой, что $d(\partial B', \partial B(R)) > 0$. Здесь под $d(A, B)$ подразумевается расстояние между множествами A и B в метрике, порожденной нормой пространства $L_1(\mathbb{R})$.

Исследуем оператор $\mathcal{S}$ более подробно.

Remark 5. Заметим, что оператор $\mathcal{S}$ также определен, как действующий из $B(R)$ в $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$ (где условие, налагаемое на R такое же, что и в теореме 5), но не является компактным.

Доказательство. Пусть $f \in B(R)$. В силу свойств функции $\bar{\omega}$ по лемме 1 получим, что $\bar{\omega}f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, очевидно, $\bar{\omega}f \in C(\mathbb{R})$, следовательно, имеется $\bar{\omega}f \in \tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$. Так как свертка суммируемых функций суммируема, то $[\bar{\omega}f * f] \in \tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$. Кроме того

$$|[\bar{\omega} * f](x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(x-y)f(y)dy \right| \leq R\|\bar{\omega}\|_C$$

то есть, по следствию 1 получим, что $f[\bar{\omega} * f] \in L_1(\mathbb{R})$, имеется $f[\bar{\omega} * f] \in \tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$. В то же время, с учетом непрерывности функции f и $\bar{\omega}$, замкнутости пространства $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$ относительно умножения на интегрируемые функции, мы имеем $f[\bar{\omega}f * f] \in \tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$. Из лемм 7 и 8 следует, что при условии $f \in B(R)$ функция

$$h_Y(x) = -\frac{\frac{b-d}{Y}}{\bar{\omega}(x) + b}$$

отделена от бесконечности равномерно по f и более того равномерно по f непрерывна. Таким образом, оператор $\mathcal{S}$ действительно действует из $B(R)$ в $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$.

Для того, чтобы показать его некомпактность, достаточно найти последовательность функций $f_n \in B(R)$, из образа которой нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность.

Так как $\bar{\omega}(x)$ - неотрицательная непрерывная функция, равная по норме единице, то $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \implies \bar{\omega}(x_0) \geq \mu > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 > 0$, так как функция радиально симметрична. Пусть $I_n =$

$[nx_0; (n+1)x_0], n \in \mathbb{N}$, рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{R}{2x_0}, x \in I_n, \\ 0, x \notin I_n. \end{cases}$$

Очевидно, что f_n лежат в $B(R)$. Заметим также, что, поскольку $h_Y(x)$ равномерно по f отделена от нуля и бесконечности, достаточно показать некомпактность оператора $\mathcal{P}f = f[\bar{\omega} * f] + f[\bar{\omega}f * f]$. В дальнейших выкладках учтем тот факт, что при $x \in (nx_0; (n+1)x_0), y \in (mx_0; (m+1)x_0), m \neq n$ имеем $f_n(x-y) = f_m(x-y) = 0$.

Пусть $n, p \in \mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{P}f_{n+p} - \mathcal{P}f_n\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\ & = \|f_{n+p}[f_{n+p} * \bar{\omega}f_{n+p}] + f_{n+p}[f_{n+p} * \bar{\omega}] - f_n[f_n * \bar{\omega}f_n] - f_n[f_n * \bar{\omega}]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \\ & = \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_{n+p}(x) ([f_{n+p} * \bar{\omega}f_{n+p}] + [f_{n+p} * \bar{\omega}]) (x) - f_n(x) ([f_n * \bar{\omega}f_n] + [f_n * \bar{\omega}]) (x)|, \right. \\ & \quad \left. \int_{\mathbb{R}} |f_{n+p}(x) ([f_{n+p} * \bar{\omega}f_{n+p}] + [f_{n+p} * \bar{\omega}]) (x) - f_n(x) ([f_n * \bar{\omega}f_n] + [f_n * \bar{\omega}]) (x)| dx \right\} \\ & \geq \max \left\{ \sup_{x \in I_n} |f_{n+p}(x) ([f_{n+p} * \bar{\omega}f_{n+p}] + [f_{n+p} * \bar{\omega}]) (x) - f_n(x) ([f_n * \bar{\omega}f_n] + [f_n * \bar{\omega}]) (x)|, \right. \\ & \quad \left. \int_{I_n} |f_{n+p}(x) ([f_{n+p} * \bar{\omega}f_{n+p}] + [f_{n+p} * \bar{\omega}]) (x) - f_n(x) ([f_n * \bar{\omega}f_n] + [f_n * \bar{\omega}]) (x)| dx \right\} \\ & = \max \left\{ \sup_{x \in I_n} \left(f_n(x) [f_n * \bar{\omega}f_n] (x) + f_n(x) [f_n * \bar{\omega}] (x) \right), \right. \\ & \quad \left. \int_{I_n} \left(f_n(x) [f_n * \bar{\omega}f_n] (x) + f_n(x) [f_n * \bar{\omega}] (x) \right) dx \right\} \\ & \geq \frac{R}{2x_0} \cdot \max \left\{ \sup_{x \in I_n} ([f_n * \bar{\omega}f_n] (x) + [f_n * \bar{\omega}] (x)), \int_{I_n} ([f_n * \bar{\omega}f_n] (x) + [f_n * \bar{\omega}] (x)) dx \right\} \\ & \geq \frac{R}{2x_0} \cdot \max \left\{ \sup_{x \in I_n} \left(\int_{I_n} \bar{\omega}(y) f_n(y) f_n(x-y) dy + \int_{I_n} \bar{\omega}(y) f_n(x-y) dy \right), \right. \\ & \quad \left. \int_{I_n} \int_{I_n} \bar{\omega}(x-y) f_n(x-y) f_n(y) dy dx + \int_{I_n} \int_{I_n} \bar{\omega}(x-y) f_n(y) dy dx \right\} \\ & \geq \frac{R^2}{4x_0^2} \int_{I_n} \int_{I_n} \bar{\omega}(x-y) dy dx \geq \frac{R^2 \delta^2}{4x_0^2} \mu > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\exists \varepsilon = \frac{R^2 \delta^2}{4x_0^2} \mu > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\|\mathcal{P}f_{n+p} - \mathcal{P}f_n\|_1 \geq \varepsilon$$

что означает, некомпактность оператора $\mathcal{P}$, а соответственно и $\mathcal{S}$. □

Theorem 8. Рассмотрим часть $\mathcal{G}f = (f + 1) ([\omega f * f] + [\omega * f]) = f[\omega f * f] + f[\omega * f] + [\omega f * f] + [\omega * f]$, содержащую самосвёртку функции, умноженной на себя, и оператор $\mathcal{G}$ ограничен.

Доказательство. Для простоты выкладок разделим оператор $\mathcal{G}$ на составляющие операторы и будем рассматривать их отдельно:

$$\mathcal{G}f = \mathcal{G}_1 f + \mathcal{G}_2 f + \mathcal{G}_3 f + \mathcal{G}_4 f$$

$$\mathcal{G}_1 f = f[f * \omega f]$$

$$\mathcal{G}_2 f = f[f * \omega]$$

$$\mathcal{G}_3 f = [f * \omega f]$$

$$\mathcal{G}_4 f = [f * \omega]$$

Рассмотрим каждый оператор по отдельности. Проведём оценку константы условия Липшица для оператора $\mathcal{G}_1$:

$$\|\mathcal{G}_1 f_1 - \mathcal{G}_1 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \|f_1 [f_1 * \omega f_1] - f_2 [f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$$

Проведение оценки в ситуации, когда все множители в обеих слагаемых различны, представляется сложной задачей, поэтому воспользуемся неравенством треугольника и разобьём норму на сумму отдельных норм, различия частей в которых не превышают одного

множителя:

$$\begin{aligned}
& \|f_1 [f_1 * \omega f_1] - f_2 [f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \\
& \leq \|f_1 [f_1 * \omega f_1] - f_2 [f_1 * \omega f_1]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \\
& + \|f_2 [f_1 * \omega f_1] - f_2 [f_2 * \omega f_1]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \\
& + \|f_2 [f_2 * \omega f_1] - f_2 [f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\
& = \mathcal{G}_1^1 + \mathcal{G}_1^2 + \mathcal{G}_1^3.
\end{aligned}$$

Будем рассматривать каждое из этих слагаемых по отдельности. Рассмотрим $\mathcal{G}_1^1$. Распишем норму и раскроем знаки свёртки:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1^1 &= \|f_1 [f_1 * \omega f_1] - f_2 [Q_1 * \omega f_1]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1 [f_1 * \omega f_1](x) - f_2 [f_1 * \omega f_1](x)|, \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} |f_1 [f_1 * \omega f_1](x) - f_2 [f_1 * \omega f_1](x)| dx \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(|f_1(x) - f_2(x)| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(y) f_1(y) dy \right| \right), \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| \cdot |f_1(x-y) \omega(y) f_1(y)| dx dy \right\}
\end{aligned}$$

Функция $\omega(y)$ оценивается $\sup \omega$ - поскольку она ограничена, а функция f_1 оценивается $\sup f_1$, поскольку она принадлежит пространству $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$. Оценим их и вынесем одинаковые множители наружу выражения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1^1 &\leq \sup f_1 \cdot \sup \omega \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| \cdot \int_{\mathbb{R}} |f_1(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |f_1(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| dx \right\} \\
&= \sup f_1 \cdot \sup \omega \cdot \int_{\mathbb{R}} |f_1(y)| dy \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| dx \right\} \\
&= \sup f_1 \cdot \sup \omega \cdot \int_{\mathbb{R}} |f_1(y)| dy \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}
\end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathcal{G}_1^2$. Распишем норму:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1^2 &= \|f_2[f_1 * \omega f_1] - f_2[f_2 * \omega f_1]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_2[f_1 * \omega f_1](x) - f_2[f_2 * \omega f_1](x)|, \int_{\mathbb{R}} |f_2[f_1 * \omega f_1](x) - f_2[f_2 * \omega f_1](x)| dx \right\} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_2(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(x-y) f_1(y) dy - \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(x-y) f_2(y) dy \right) \right|, \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left| f_2(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(x-y) f_1(y) dy - \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(x-y) f_2(y) dy \right) \right| dx \right\} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_2(x) \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(x-y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right|, \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left| f_2(x) \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(x-y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| dx \right\}
\end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Фубини, и внесём $f_2(x)$ под знак двойного интеграла. Также воспользуемся определением пространства и оценим $f_1(x-y)$ и $\omega(x-y)$ их супремумами:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1^2 &\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_2(x)| \cdot \sup f_1 \cdot \sup \omega \cdot \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| dy, \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f_2(x)| \cdot \sup f_1 \cdot \sup \omega \cdot (f_1(y) - f_2(y)) dy dx \right\} = \\
&= |\sup f_1 \cdot \sup \omega| \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_2(x)| \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| dy, \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} |f_2(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| dy \right\} = \\
&= |\sup f_1 \cdot \sup \omega| \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| dy \leq \\
&\leq |\sup f_1 \cdot \sup \omega| \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \max \left(\max_{y \in \mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)|, \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| dy \right) = \\
&= |\sup f_1 \cdot \sup \omega| \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}
\end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathcal{G}_1^3$. Распишем норму:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1^3 &= \|f_2[f_2 * \omega f_1] - f_2[f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_2[f_2 * \omega f_1](x) - f_2[f_2 * \omega f_2](x)|, \int_{\mathbb{R}} |f_2[f_2 * \omega f_1](x) - f_2[f_2 * \omega f_2](x)| dx \right\} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_2(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(x-y) f_2(y) dy - \int_{\mathbb{R}} f_2(x-y) \omega(x-y) f_2(y) dy \right) \right|, \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left| f_2(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(x-y) f_2(y) dy - \int_{\mathbb{R}} f_2(x-y) \omega(x-y) f_2(y) dy \right) \right| dx \right\} \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_2(x) \int_{\mathbb{R}} (f_1(x-y) - f_2(x-y)) \omega(x-y) f_2(y) dy \right|, \right. \\
&\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left| f_2(x) \int_{\mathbb{R}} (f_1(x-y) - f_2(x-y)) \omega(x-y) f_2(y) dy \right| dx \right\}
\end{aligned}$$

Вывод записи условия Липшицы для $\mathcal{G}_1^3$ аналогичен выводу для $\mathcal{G}_1^2$ с точностью до замены коэффициентов операторов f . В результате получаем:

$$\|f_2[f_2 * \omega f_1] - f_2[f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq |\sup f_2 \sup \omega| \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$$

Таким образом, условие Липшица для $\mathcal{G}_1$ записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}_1 f_1 - \mathcal{G}_1 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \|f_1[f_1 * \omega f_1] - f_2[f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \\
&\leq \sup \omega \cdot \left(\sup f_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} |f_1(y)| dy + \sup f_1 \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \sup f_2 \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \right) \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}
\end{aligned}$$

Проведём оценку константы условия Липшица для оператора $\mathcal{G}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2 f &= f[f * \omega] \\
\|\mathcal{G}_2 f_1 - \mathcal{G}_2 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \|f_1[f_1 * \omega] - f_2[f_2 * \omega]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \\
&\leq \|f_1[f_1 * \omega] - f_2[f_1 * \omega]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \\
&\quad + \|f_2[f_1 * \omega] - f_2[f_2 * \omega]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \\
&= \mathcal{G}_2^1 + \mathcal{G}_2^2
\end{aligned}$$

Будем рассматривать каждое из этих слагаемых по отдельности. Рассмотрим $\mathcal{G}_2^1$. Распишем норму и раскроем знаки свёртки:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2^1 &= \|f_1[f_1 * \omega] - f_2[f_1 * \omega]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x)) [f_1 * \omega](x)|, \int_{\mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x)) [f_1 * \omega](x)| dx \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| (f_1(x) - f_2(x)) \int_{\mathbb{R}} f_1(y) \omega(x-y) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| (f_1(x) - f_2(x)) \int_{\mathbb{R}} f_1(y) \omega(x-y) dy \right| dx \right\} \\
&\leq \sup \omega \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x))| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(y) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x))| dx \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(y) dy \right| \right\}
\end{aligned}$$

Заметим, что $\left| \int_{\mathbb{R}} f_1(y) dy \right|$ не зависит от x , и потому может быть вынесен за пределы выражения $\max$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2^1 &= \sup \omega \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(y) dy \right| \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x))|, \int_{\mathbb{R}} |(f_1(x) - f_2(x))| dx \right\} = \\
&= \sup \omega \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(y) dy \right| \cdot \|Q_1 - Q_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \\
&\leq \sup \omega \cdot \|f_1\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}
\end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathcal{G}_2^2$. Распишем норму и раскроем знаки свёртки:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2^2 &= \|f_2[f_1 * \omega] - f_2[f_2 * \omega]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_2(x) ([f_1 * \omega](x) - [f_2 * \omega](x))|, \int_{\mathbb{R}} |f_2(x) ([f_1 * \omega](x) - [f_2 * \omega](x))| dx \right\} = \\
&= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_2(x) \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) \omega(x-y) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| f_2(x) \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) \omega(x-y) dy \right| dx \right\} \\
&\leq \sup \omega \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f_2(x) \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| f_2(x) \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| dx \right\} \leq \\
&\leq \sup \omega \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_2(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f_2(x)| dx \right\} = \\
&\leq \sup \omega \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}.
\end{aligned}$$

Выражение $\left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right|$ можно оценить нормой $\|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$:

$$\mathcal{G}_2^2 \leq \sup \omega \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$$

Таким образом, условие Липшица для $\mathcal{G}_2$ записывается в виде:

$$\|\mathcal{G}_2 f_1 - \mathcal{G}_2 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \|f_1 [f_1 * \omega] - f_2 [f_2 * \omega]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \sup \omega \cdot (\|f_1\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}) \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{G}_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3 f &= [f * \omega f] \\ \|\mathcal{G}_3 f_1 - \mathcal{G}_3 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \|[f_1 * \omega f_1] - [f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \\ &\leq \|[f_1 * \omega f_1] - [f_1 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \\ &+ \|[f_1 * \omega f_2] - [f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\ &= \mathcal{G}_3^1 + \mathcal{G}_3^2 \end{aligned}$$

Будем рассматривать каждое из этих слагаемых по отдельности. Рассмотрим $\mathcal{G}_3^1$. Распишем норму и раскроем знаки свёртки:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3^1 &= \|[f_1 * \omega f_1] - [f_1 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |[f_1 * \omega f_1](x) - [f_1 * \omega f_2](x)|, \int_{\mathbb{R}} |[f_1 * \omega f_1](x) - [f_1 * \omega f_2](x)| dx \right\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(x-y) \omega(y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| dx \right\} \end{aligned}$$

Оценим $\omega(y)$ и $f_1(x-y)$ значениями $\sup \omega$ и $\sup f_1$ соответственно:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3^1 &\leq \sup \omega \cdot \sup f_1 \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| dx \right\} = \\ &= \sup \omega \cdot \sup f_1 \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathcal{G}_3^2$. Распишем норму и раскроем знаки свёртки:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_3^2 &= \|[f_1 * \omega f_2] - [f_2 * \omega f_2]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |[f_1 * \omega f_2](x) - [f_2 * \omega f_2](x)|, \int_{\mathbb{R}} |[f_1 * \omega f_2](x) - [f_2 * \omega f_2](x)| dx \right\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_2(x-y) \omega(x-y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right|, \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f_2(x-y) \omega(x-y) (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| dx \right\} \leq\end{aligned}$$

Оценим $\omega(x-y)$ и $f_2(x-y)$ значениями $\sup \omega$ и $\sup f_2$ соответственно:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_3^2 &\leq \sup \omega \cdot \sup f_2 \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) dy \right| dx \right\} = \\ &= \sup \omega \cdot \sup f_2 \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}\end{aligned}$$

Таким образом, условие Липшица для $\mathcal{G}_3$ записывается в виде:

$$\|\mathcal{G}_3 f_1 - \mathcal{G}_3 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \|f_1 [f_1 * \omega] - f_2 [f_2 * \omega]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \sup \omega \cdot (\sup f_1 + \sup f_2) \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{G}_4$:

$$\mathcal{G}_4 f = [f * \omega]$$

Распишем норму и раскроем знаки свёртки:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_4^1 &= \|\mathcal{G}_4 f_1 - \mathcal{G}_4 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \|[f_1 * \omega] - [f_2 * \omega]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |[f_1 * \omega](x) - [f_2 * \omega](x)|, \int_{\mathbb{R}} |[f_1 * \omega](x) - [f_2 * \omega](x)| dx \right\} = \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) \omega(x-y) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) \omega(x-y) dy \right| dx \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(y) - f_2(y)) \omega(x-y) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| \left| \int_{\mathbb{R}} \omega(x-y) dx \right| dy \right\}\end{aligned}$$

Заметим, что $\omega(x - y)$ и $\left| \int_{\mathbb{R}} \omega(x - y) dx \right|$ можно оценить $\|\omega\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$ и вынести из-под знака max:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4^1 &\leq \|\omega\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \max \left\{ \sup_{x \in R} \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| dy, \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| dy \right\} = \\ &= \|\omega\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f_1(y) - f_2(y)| dy \leq \\ &\leq \|\omega\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \end{aligned}$$

Таким образом, для оператора $\mathcal{G}f$ имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{G}f_1 - \mathcal{G}f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq \\ &\leq \|\mathcal{G}_1 f_1 - \mathcal{G}_1 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|\mathcal{G}_2 f_1 - \mathcal{G}_2 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|\mathcal{G}_3 f_1 - \mathcal{G}_3 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|\mathcal{G}_4 f_1 - \mathcal{G}_4 f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\ &= \mathcal{G}_1^1 + \mathcal{G}_1^2 + \mathcal{G}_1^3 + \mathcal{G}_2^1 + \mathcal{G}_2^2 + \mathcal{G}_3^1 + \mathcal{G}_3^2 + \mathcal{G}_4^1 = \\ &= \sup \omega \cdot \left(\sup f_1 \cdot \int_R |f_1(y)| dy + \sup f_1 \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \sup f_2 \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \right) \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \\ &\quad + \sup \omega \cdot \|f_1\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \sup \omega \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \\ &\quad + \sup \omega \cdot \sup f_1 \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \sup \omega \cdot \sup f_2 \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|\omega\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \\ &= \left(\sup f_1 \cdot \int_R |f_1(y)| dy + \sup f_1 \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \sup f_2 \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \right. \\ &\quad \left. + \|f_1\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \sup f_1 + \sup f_2 \right) \cdot \sup \omega \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|\omega\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \end{aligned}$$

□

Лемма 9. При выполнении условий лемм 7 и 8 оператор $\mathcal{S}$ является липшицевым с некоторой константой $L = L(d')$, при этом $L(d') \xrightarrow{d' \rightarrow 0+0} 0$.

Доказательство. Пусть $f \in B(R)$. В силу условия, накладываемого на R , функция

$$h_Y(x) = -\frac{\frac{b-d}{Y}}{\bar{\omega}(x) + b}$$

равномерно по f отделена от нуля и бесконечности (следствие лемм 7 и 8), поэтому достаточно показать липшицевость оператора $\mathcal{P}f = f([\bar{\omega}f * f] + [\bar{\omega} * f])$.

По теореме 8, если $f_1, f_2 \in B(R)$, то

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}f - \mathcal{P}g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &\leq d' \left(\sup f_1 \cdot \int_R |f_1(y)| dy + \sup f_1 \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \sup f_2 \cdot \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \right. \\ &\quad \left. + \|f_1\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \|f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + \sup f_1 + \sup f_2 \right) \cdot \sup \omega \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} + d' \|\omega\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f_1 - f_2\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}. \end{aligned}$$

Константа липшицевости оператора $\mathcal{S}$ стремится к нулю при $d' \rightarrow 0 + 0$. $\square$

Лемма 10. При выполнении условий лемм 7 и 8, норма оператора $\mathcal{S}$ стремится к нулю при $d' \rightarrow 0 + 0$.

Доказательство. Рассмотрим по отдельности выражения $f[\bar{\omega}f * f]$ и $f[\bar{\omega} * f]$.

$$\begin{aligned} \|f[\bar{\omega} * f]\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(x-y) f(y) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(x-y) f(y) dy \right| dx \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(x-y) \cdot |f(y)| dy \right|, \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \int_{\mathbb{R}} |\bar{\omega}(x-y)| \cdot |f(y)| dy dx \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|\bar{\omega}\|_C \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \int_{\mathbb{R}} f(y) dy, \|\bar{\omega}\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy dx \right\} \\ &= \|\bar{\omega}\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \cdot \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}^2 \leq \|\bar{\omega}\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} R \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} < d' \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}. \\ \|f[\bar{\omega}f * f]\|_1 &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(x-y) f(x-y) f(y) dy \right|, \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(x-y) f(x-y) f(y) dy \right| dx \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(x-y) f(x-y) f(y) dy \right|, \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot |f(x-y)| \cdot |\bar{\omega}(x-y)| \cdot |f(y)| dy dx \right\} \\ &\leq \max \left\{ \|\bar{\omega}\|_C \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \|f\|_C^2, \|\bar{\omega}\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_1}^3 \right\} = \|\bar{\omega}\|_{\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{L}}_1}} \cdot \|f\|_{\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{L}}_1}}^3 < d' \|f\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}^2 \end{aligned}$$

Итак, норма оператора $\mathcal{P} = f[\bar{\omega}f * f] + f[\bar{\omega} * f]$ не превосходит $2d'$, значит, она стремится к нулю, когда d' стремится к нулю. Это означает, что и норма $\mathcal{S}$ тоже стремится к нулю, когда d' стремится к нулю, поскольку по леммам 7 и 8 функция

$$h_Y(x) = -\frac{\frac{b-d}{Y}}{\bar{\omega}(x) + b}$$

равномерно по f отделена от бесконечности. $\square$

Theorem 9 (Теорема о неподвижных точках возмущенного компактного оператора).

Пусть на области G банахова пространства задан компактный оператор с ненулевым вращением на границе, при этом он переводит область G в некоторую подобласть $H \subset G$, такую, что $d(\partial G, \partial H) = \delta > 0$. Если его возмутить липшицевым оператором, норма которого не превосходит δ , то возмущенный оператор будет иметь в G неподвижные точки.

Theorem 10. *Пусть выполнены условия теорем 5 и 7, то при достаточно малом d' оператор $\mathcal{A}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку. малом d' оператор $\mathcal{A}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку.*

Доказательство. По леммам 9 и 10 оператор $\mathcal{S}$ липшицев, причем его норма стремится к нулю, когда d' стремится к нулю. При $\alpha > 0$ величина $d(\partial B(R), \partial \mathcal{K}[B(R)])$ положительна и не зависит от d' (замечание 4). Таким образом, по теореме о неподвижных точках возмущенного компактного оператора оператор $\mathcal{K} + \mathcal{S} = \mathcal{A}$ имеет в $B(R)$ неподвижную точку при достаточно малом значении d' . $\square$

Conclusion 1. *Уравнение равновесия при выполнении условий теоремы 10 имеет решение.*

Conclusion 2. *Если $\frac{d'\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega} \neq 0$, то неподвижная точка оператора $\mathcal{A}$ ненулевая.*

Доказательство. Пусть $f \equiv 0$. Тогда $\mathcal{A}f = \frac{d'\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega}$. По условию следствия $\mathcal{A}f \neq 0$, значит, нулевая функция не является неподвижной точкой оператора равновесия. Однако теорема 10 все еще верна, выходит, что оператор $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку, и она не может быть нулевой. $\square$

7.2 Единственность неподвижной точки оператора равновесия

Рассмотрим вопрос о достаточных условиях единственности неподвижной точки оператора $\mathcal{A}$. Имеет место следующая лемма.

Lemma 11. Пусть оператор $\mathcal{A}$ липшицев с константой липшицевости $L < 1$, тогда у него не может существовать более одной неподвижной точки.

Доказательство. Предположим, что у оператора $\mathcal{A}$ существуют две различные неподвижные точки. Обозначим их f и g соответственно. Поскольку $\mathcal{A}$ липшицев, то $\|\mathcal{A}f - \mathcal{A}g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq L\|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$. Однако $f = \mathcal{A}f$ и $g = \mathcal{A}g$, таким образом

$$0 < \|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} = \|\mathcal{A}f - \mathcal{A}g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \leq L\|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} < \|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}.$$

Однако это невозможно. Значит, у оператора $\mathcal{A}$ не может быть двух различных неподвижных точек. $\square$

Исследуем оператор $\mathcal{K}$ на липшицевость.

Lemma 12. Оператор $\mathcal{B}_{\bar{\omega}}f = [\bar{\omega} * f]$ липшицев с константой липшицевости d' .

Доказательство. Рассмотрим любые функции f и g из $\tilde{\mathcal{L}}_1(\mathbb{R})$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_{\bar{\omega}}f - \mathcal{B}_{\bar{\omega}}g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |[\bar{\omega} * f](x) - [\bar{\omega} * g](x)|, \int_{\mathbb{R}} |[\bar{\omega} * f](x) - [\bar{\omega} * g](x)| dx \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |[\bar{\omega} * (f - g)]|, \int_{\mathbb{R}} |[\bar{\omega} * (f - g)]| dy dx \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(y)(f(x - y) - g(x - y)) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(y)(f(x - y) - g(x - y)) dy \right| dx \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} \bar{\omega}(y) dy \right|, \int_{\mathbb{R}} |\bar{\omega}(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x - y) - g(x - y)| dx dy \right\} \\ &= \|\bar{\omega}\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|, \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x - y) - g(x - y)| dx dy \right\} \\ &\leq \|\bar{\omega}\|_{\mathcal{L}_1} \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|, \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \right\} \\ &= d' \|f - g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \end{aligned}$$

$\square$

Remark 6. Аналогично можно показать, что оператор $\mathcal{B}_{\bar{m}}f = [\bar{m} * f]$ является липшицевым с константой липшицевости b .

Лемма 13. При условии, что $b > d$, оператор $\mathcal{N}f = \frac{Y\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega}$ является липшицевым с константой липшицевости равной в $d \frac{\|\omega\|_C}{b-d}$.

Доказательство. Рассмотрим любые функции f и g из $L_1(\mathbb{R})$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}f - \mathcal{N}g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} &= \frac{1}{b-d} \cdot \left\| \left(\langle \bar{\omega}, f+1 \rangle - \langle \bar{\omega}, g+1 \rangle \right) \cdot \bar{m} \right\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1} \\ &= \frac{1}{b-d} \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\left| \int_{\mathbb{R}} (f(y)+1)\bar{\omega}(y)dy - \int_{\mathbb{R}} (g(y)+1)\bar{\omega}(y)dy \right| \cdot |\bar{m}(x)| \right), \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(y)+1)\bar{\omega}(y)dy - \int_{\mathbb{R}} (g(y)+1)\bar{\omega}(y)dy \right| \cdot |\bar{m}(x)|dx \right\} \\ &= \frac{1}{b-d} \cdot \max \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \bar{m}(x) \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(y)-g(y)| \cdot |\bar{\omega}(y)|dy, \int_{\mathbb{R}} |f(y)-g(y)| \cdot |\bar{\omega}(y)|dy \cdot \int_{\mathbb{R}} \bar{m}(x)dx \right\} \\ &\leq \frac{bd'}{b-d} \frac{\|\omega\|_C \|m\|_C}{b-d} \|f-g\|_{\tilde{\mathcal{L}}_1}. \end{aligned}$$

□

Theorem 11. В условиях теоремы 5 существует такое $b_0 > 0$, что для всех $b \in (0; b_0)$ и для всех $d \in [0; b)$, существует $d'_0 = d'_0(b, d) > 0$ такое, что при всех $d' \in (0; d'_0)$ оператор $\mathcal{K}$ является липшицевым с константой липшицевости $L < 1$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{Q}f = \frac{Y\bar{m}}{b-d} - \bar{\omega} + [\bar{m} * f].$$

Имеет место представление

$$\mathcal{Q} = \mathcal{N} + \mathcal{B}_{\bar{m}}.$$

По леммам 12 и 13 с учетом оценки $\frac{1}{Y} \leq \frac{1}{d'\rho}$, получим, что оператор $\mathcal{Q}$ является липшицевым с константой липшицевости $L_Q = bd' \frac{\|\omega\|_C}{b-d} + b$. Видно, что существует настолько малое $b' > 0$, что при всех $b \in (0; b')$ и $d \in (0; b)$ найдется такое $\bar{d}'_0$, что $\forall d' \in (0; \bar{d}'_0) \implies L_Q < 1$.

Заметим, что по лемме 8 функция $g_Y(x) = \frac{1}{\bar{\omega}(x)+b}$ равномерно по f отделена от нуля и бесконечности при всех $f \in B(R)$. В таком случае оператор $\mathcal{K}$ также является липши-

цевым с некоторой константой L . Кроме того, нетрудно заметить, что верно следующее утверждение

$$\left(\exists b_0 > 0 \right) \left(\forall b \in (0; b_0) \right) \left(\forall d \in (0; b) \right) \left(\exists d'_0 = d'_0(b, d) \right) : \left[\left(\forall d' \in (0; d'_0) \right) \implies \left(L < 1 \right) \right].$$

□

Итак, оператор $\mathcal{K}$ является липшицевым, а кроме того, при достаточно малых значениях констант b, d и d' его константа липшицевости строго меньше единицы. В доказательстве теоремы 10 показано, что оператор $\mathcal{S}$ также является липшицевым, причем его константа липшицевости стремится к нулю, когда d' стремится к нулю. Суммируя эти факты, мы можем доказать следующую теорему.

Theorem 12. *В условиях теорем 10 и 11 существуют такие константы $b > d \geq 0$ и настолько малое $d' > 0$, что оператор $\mathcal{A}$ имеет в шаре $B(R)$ единственную неподвижную точку.*

Доказательство. По лемме 9 и теореме 11 операторы $\mathcal{K}$ и $\mathcal{S}$ липшицевы. Поскольку $\mathcal{A} = \mathcal{K} + \mathcal{S}$, то из липшицевости операторов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{S}$ следует и липшицевость оператора $\mathcal{A}$, причем его константа липшицевости L равна сумме соответствующих констант операторов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{S}$.

Кроме того, по лемме 9 и теореме 11 можно подобрать настолько малые константы b, d и d' , что L будет строго меньше единицы. В таком случае по лемме 11 у оператора не может быть больше одной неподвижной точки. Однако теорема 10 гарантирует ее существование. □

8 Результаты численного метода

На рисунке представлена кривая зависимости решения $C'(x)$ нелинейного интегрального уравнения с условиями замыкания на втором порядке трехуровневого

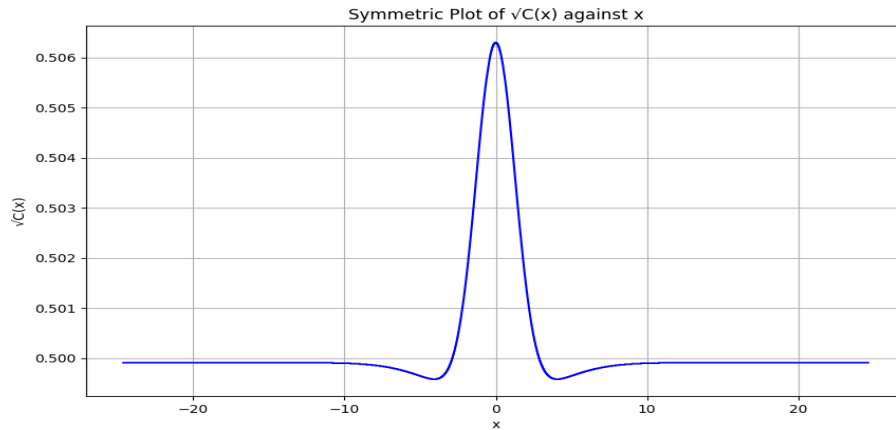


Рис. 1: Второго порядка трехуровневого замыкания

пространственного момента. Мы можем наблюдать, что данные начинаются с 2.95562, постепенно уменьшаются и в конечном итоге приближаются к 2.49720. Диапазон значений составляет от 0.24992 до 0.24927, а корень квадратный из $C(x)$ постепенно приближается к 0.5.

9 Заключение

Применение теоремы Лерея-Шаудера и теоремы о сжимающем отображении Банаха позволяет убедиться в том, что система нелинейных интегральных уравнений, полученная трехуровневым методом замыкания в пространстве моментов, имеет единственное решение, которое можно эффективно визуализировать с помощью численных методов. В процессе доказательства существования решения было построено новое банахово пространство путем введения новой нормы, что решает проблему потери интегрируемости функции после свертки с самой собой и умножения на себя, которая исключает функцию из пространства интегрируемых функций Лебега.

Список литературы

- [1] Thomas Robert Malthus. *An essay on the principle of population, as it affects the future impovement of society, with remarks on the speculations of Mr. Godwin, M. Condorcet, and other writers*. The Lawbook Exchange, Ltd., 2007. [1.1](#)
- [2] Alfred J Lotka. Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 6(7):410–415, 1920. [1.1](#)
- [3] Alfred James Lotka. *Elements of physical biology*. Williams & Wilkins, 1925. [1.1](#), [1.2](#)
- [4] Vito Volterra. Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together. *ICES Journal of Marine Science*, 3(1):3–51, 1928. [1.1](#)
- [5] Richard Law and Ulf Dieckmann. Moment approximations of individual-based models. 1999. [1.2](#)
- [6] Ulf Dieckmann and Richard Law. Relaxation projections and the method of moments. 1999. [1.2](#), [5](#)
- [7] Benjamin Bolker and Stephen W Pacala. Using moment equations to understand stochastically driven spatial pattern formation in ecological systems. *Theoretical population biology*, 52(3):179–197, 1997. [1.2](#)
- [8] David J Murrell, Ulf Dieckmann, and Richard Law. On moment closures for population dynamics in continuous space. *Journal of theoretical biology*, 229(3):421–432, 2004. [5](#)
- [9] PF Verhulst. Notice on the law that the population follows in its growth. *Corresp Math Phys*, 10:113–26, 1838. [5](#)
- [10] Андрей Колмогоров and Сергей Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Litres, 2022. [6.1](#), [6.1](#)

- [11] Владимир Иванович Смирнов. *Курс высшей математики*. Рипол Классик, 1961. [6.1](#),
[6.1](#)
- [12] Марк Александрович Красносельский. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*. Рипол Классик, 2013. [7.1](#)